Упражнения

1. Получите выражение для вектора потока объема Ω, заполняемого средой, при ее движении в пространстве; потока кинетической энергии T; потока потенциальной энергии U, если на среду воздействует силовое поле так, что элемент dm среды имеет потенциальную энергию $u(x, y, z)\,dm$.

2. Получите выражение для тензора потока момента G количества движения.

§ 7. Уравнение неразрывности на прямой

Вернемся к одномерному упорядоченному движению без разброса скоростей и допустим, что масса каждой порции среды в процессе эволюции не меняется, т. е. масса не возникает и не исчезает. Тогда между функциями $\rho(x, t)$ и $v(x, t)$, характеризующими эту эволюцию, имеется простая связь. В самом деле, выделим мысленно интервал с концами x и $x+dx$, на котором в некоторый момент t находится порция среды массы $dm=\rho\,dx$. За время dt через левый конец внутрь интервала войдет масса $q_m dt$ (см. § 6), а через правый из интервала выйдет масса $(q_m+\partial_x q_m)\,dt$. Разница между этими величинами идет на изменение массы в интервале, т. е.

$$\partial_t(dm)=q_m dt-(q_m+\partial_x q_m)dt=-\partial_x q_m dt. \tag{1}$$

Отсюда, деля на $dt\,dx$ и перенося все члены в одну сторону, получим

$$\frac{\partial q_m}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dm}{dx}\right)=0. \tag{2}$$

Вспомнив, что $q_m=\rho v$, $dm=\rho\,dx$, приходим окончательно к *уравнению неразрывности*

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial x}+\frac{\partial\rho}{\partial t}=0, \tag{3}$$

выражающему закон сохранения масс.

Ввиду важности этого уравнения повторим вывод, не применяя явно понятия потока. Обратимся к рис. 5. За время dt в рассматриваемый интервал войдет левая заштрихованная порция среды массы $\rho v\,dt$, а выйдет правая заштрихованная порция массы $[\rho v+\partial_x(\rho v)]\,dt$. Отсюда $\partial_t(\rho dx)=-\partial_x(\rho v)\,dt$ и, деля на $dt\,dx$, мы вновь приходим к уравнению (3).

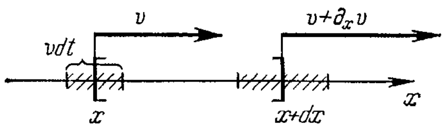

Рис. 5.

Иногда предпочитают пользоваться *интегральной формой* этого уравнения. Именно, выделим мысленно произвольный интервал (a, b) оси x. Массу среды, находящейся на нем в момент t, обозначим через $m_{(a,b)}$. Тогда баланс масс, аналогичный проведенному при выводе соотношения (1), приводит после деления на dt к равенству

$$\frac{d}{dt} m_{(a,b)} = q_m|_{x=a} - q_m|_{x=b}. \tag{4}$$

Переход к плотности и скорости дает

$$\frac{d}{dt}\int_a^b \rho\, dx = (\rho v)|_{x=a} - (\rho v)|_{x=b}. \tag{5}$$

Из этого уравнения легко получить (3) и обратно (проделайте это!).

Итак, функции $\rho(x, t)$ и $v(x, t)$, характеризующие эволюцию среды, должны быть связаны между собой уравнением неразрывности (3). Поэтому, хотя любую положительную функцию $\rho(x, t)$ можно трактовать как закон изменения плотности в некоторой среде, но если эта функция уже известна, то произвол в выборе функции $v(x, t)$ весьма ограничивается. В самом деле, интегрируя равенство (3) от некоторого фиксированного x_0 до произвольного x при любом постоянном t, получим:

$$\rho v = (\rho v)|_{x=x_0} - \int_{x_0}^{x} \rho'_t(x, t)\, dx = \varphi(t) - \int_{x_0}^{x} \rho'_x(x, t)\, dx,$$

где $\varphi(t)$ — некоторая функция времени; отсюда

$$v = \frac{\varphi(t)}{\rho(x, t)} - \frac{1}{\rho(x, t)}\int_{x_0}^{x} \rho'_t(x, t)\, dx. \tag{6}$$

Обратно, с помощью непосредственной подстановки легко проверить, что при любой функции $\varphi(t)$ выражение (6) удовлетворяет соотношению (3). Итак, если закон изменения плотности $\rho(x, t)$ задан, то закон изменения скорости $v(x, t)$ определен с точностью до произвольной функции одного лишь времени.

Рассмотрим два важных частных случая, когда уравнение неразрывности приобретает особенно простой вид. Это, во-первых, случай стационарного потока, для которого ρ и v не меняются с течением времени t, а могут зависеть лишь от x. Для этого случая из сохранения массы сразу следует, что поток массы должен быть во всех точках одинаковым:

$$q_m(x) = \rho(x)\, v(x) = \text{const}, \tag{7}$$

где правая часть не зависит ни от t, ни от x. Впрочем, это легко и формально вывести из уравнений (3) или (5).

Рассмотрим, во-вторых, однородный поток, для которого ρ и v не зависят от x, а могут зависеть только от t. Для такого потока из (3) получаем, что $\rho \equiv \rho_0 = \text{const}$, тогда как v может произвольно зависеть от t. Об этом случае мы упоминали в конце § 2.

Выведем теперь уравнение неразрывности в координатах Лагранжа. Для этого заметим, что масса $\rho\,dx$ среды на интервале dx, движущемся вместе со средой, остается неизменной. Значит, $\frac{d}{dt}(\rho dx)=0$; однако $dx=\frac{\partial x}{\partial \xi}d\xi$, и потому мы приходим к равенству

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)=0, \tag{8}$$

которое и служит уравнением неразрывности. Его выполнение равносильно требованию, чтобы $\rho\frac{\partial x}{\partial \xi}$ было постоянным при постоянном ξ, т. е. вдоль траектории каждой частицы. Это тоже ясно: так как $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ равна коэффициенту удлинения малого участка среды в процессе движения, то мы получаем, что во сколько раз удлиняется участок, во столько же раз уменьшается плотность среды на этом участке, что равносильно закону сохранения масс.

Перепишем уравнение неразрывности (3) еще в одной полезной форме. Для этого раскроем скобки, что даст

$$\rho\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial \rho}{\partial x}v+\frac{\partial \rho}{\partial t}=0.$$

Если теперь вспомнить общее выражение (3.5) для полной производной по времени, мы получим уравнение

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}=0. \tag{9}$$

Вывод уравнения неразрывности (3) с помощью промежуточного соотношения (2) показывает, что аналогичное уравнение

$$\frac{\partial q_s}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ds}{dx}\right)=0 \tag{10}$$

или равносильное интегральное соотношение

$$\frac{d}{dt}s_{(a,b)}=q_s\big|_{x=a}-q_s\big|_{x=b} \tag{11}$$

(см. (4)) справедливо для любого интегрального параметра s, не возникающего и не исчезающего в рассматриваемом процессе. Последнее означает, что изменение величины s, отвечающей участку среды, заключенному в каком-либо интервале, должно полностью определяться протеканием s через концы этого интервала. Это условие и выражает равенство (11), из которого легко выводится уравнение неразрывности (10) для величины s.

Если рассматриваемый интегральный параметр s не остается неизменным, так что на интервале длины dx за время dt он добавляется в количестве $\varphi_s\,dx\,dt$ (где $\varphi_s=\varphi_s(x, t)$ — плотность скорости «притока» параметра s может быть любого знака), то уравнение неразрывности, взамен (10), примет, очевидно, форму

$$\frac{\partial q_s}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{ds}{dx}\right)=\varphi_s. \tag{12}$$

Если в уравнение (12) подставить $\frac{ds}{dx}=\rho_s$ (см. формулу (6.1)) и проинтегрировать обе части по x от $-\infty$ до ∞, мы получим после простого преобразования

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_s\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_s\,dx+q_s\big|_{x=-\infty}-q_s\big|_{x=\infty}.$$

Пусть, как это часто бывает, поток q_s при $x=\pm\infty$ равен нулю. Тогда получаем формулу

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_s\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi_s\,dx,$$

имеющую очевидный смысл (продумайте его!). Отметим, что из этой формулы н е с л е д у е т, вообще говоря, что

$$\frac{\partial\rho_s}{\partial t}=\varphi_s, \tag{13}$$

равны только интегралы от обеих частей. Равенство (13), как видно из (12), имеет место, только если поток q_s не зависит от x, а при условии $q_s\big|_{x=\pm\infty}=0$ — только если $q_s\equiv 0$.

Приведем примеры. Взяв в качестве интегрального параметра количество движения D, получим в силу § 6

$$q_D=\rho v^2,\qquad \frac{dD}{dx}=\rho v.$$

Отсюда по формуле (12)

$$\varphi_D=\frac{\partial q_D}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{dD}{dx}\right)=\frac{\partial(\rho v^2)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v)}{\partial t}. \tag{14}$$

Преобразуя правую часть по тому же образцу, как при выводе уравнения (9), и пользуясь соотношением (9), получаем

$$\varphi_D=\frac{d(\rho v)}{dt}+\rho v\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{d(\rho v)}{dt}-v\frac{d\rho}{dt}=\rho\frac{dv}{dt}.$$

Правая часть после умножения на dx дает $(dm)\,a$, произведение массы на ускорение, т. е., согласно второму закону Ньютона, силу, действующую на порцию среды. Таким образом, в данном примере уравнение неразрывности равносильно известному выводу о том, что приращение количества движения равно импульсу действующей силы. (Мы рассматриваем среду, в которой нет рассеивания скоростей и силового взаимодействия между частицами, т. е. нет давления. Поэтому на частицы может действовать только внешняя сила.)

Выберем теперь за интегральный параметр одномерной среды ее кинетическую энергию T. Здесь, как нетрудно проверить,

$$q_T = \frac{1}{2}\rho v^3, \quad \frac{dT}{dx} = \frac{1}{2}\rho v^2.$$

Совершая те же преобразования, что в предыдущем абзаце, получим

$$\varphi_T = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\rho v^3\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) + \frac{1}{2}\rho v^2 \frac{\partial v}{\partial x} =$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right) - \frac{1}{2}v^2\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2}\rho\frac{d(v^2)}{dt} = \left(\rho\frac{dv}{dt}\right)v.$$

Правая часть, после умножения на dx, равна произведению силы на скорость, т. е. мощности. Мы приходим к известному выводу о том, что скорость приращения кинетической энергии равна мощности действующей силы.

В качестве третьего примера рассмотрим уравнение неразрывности для зарядов. Так как заряды сохраняются, то на основании § 6 оно имеет вид

$$\frac{\partial j}{\partial x} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0,$$

где j — сила тока, а σ — линейная плотность зарядов, которая, в отличие от плотности масс, может быть любого знака.

Часто в лабораторных условиях σ оказывается малым по сравнению с $\frac{jt}{x}$, где для j, t и x выбираются их характерные значения (в противном случае потенциалы становятся огромными). Тогда можно приближенно положить $\sigma \equiv 0$ и потому $\frac{\partial j}{\partial x} = 0$, т. е. ток во всех точках одинаков и может зависеть только от времени.

Упра́жнения

1. а) Пусть в условиях сохранения массы $\rho = \frac{1}{1+x^2}$; каково общее выражение для $v(x, t)$? Как сбъяснить поведение v при $x \to \pm\infty$? б) Те же вопросы для $\rho = t^2$.

2. Как изменится соотношение (7), если дано, что частицы могут удаляться из системы, но не меняется а) количество движения порций среды или б) кинетическая энергия порций среды.

3. Проведите формальный вывод уравнения (8) из (3).

Указание. Продифференцируйте равенство (3.1) по ξ при фиксированном t.

§ 8. Уравнение неразрывности в пространстве

Перейдем теперь к выводу уравнения неразрывности в пространстве (для плоскости оно выглядит аналогично), причем будем рассматривать произвольный скалярный интегральный параметр s, не возникающий и не исчезающий в рассматриваемом процессе и об-