Выберем теперь за интегральный параметр одномерной среды ее кинетическую энергию T. Здесь, как нетрудно проверить,

$$q_T=\frac{1}{2}\rho v^3,\quad \frac{dT}{dx}=\frac{1}{2}\rho v^2.$$

Совершая те же преобразования, что в предыдущем абзаце, получим

$$\varphi_T=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{2}\rho v^3\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)+\frac{1}{2}\rho v^2\frac{\partial v}{\partial x}=$$
$$=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho v^2\right)-\frac{1}{2}v^2\frac{d\rho}{dt}=\frac{1}{2}\rho\frac{d(v^2)}{dt}=\left(\rho\frac{dv}{dt}\right)v.$$

Правая часть, после умножения на dx, равна произведению силы на скорость, т. е. мощности. Мы приходим к известному выводу о том, что скорость приращения кинетической энергии равна мощности действующей силы.

В качестве третьего примера рассмотрим уравнение неразрывности для зарядов. Так как заряды сохраняются, то на основании § 6 оно имеет вид

$$\frac{\partial j}{\partial x}+\frac{\partial \sigma}{\partial t}=0,$$

где j — сила тока, а σ — линейная плотность зарядов, которая, в отличие от плотности масс, может быть любого знака.

Часто в лабораторных условиях σ оказывается малым по сравнению с $\frac{jt}{x}$, где для j, t и x выбираются их характерные значения (в противном случае потенциалы становятся огромными). Тогда можно приближенно положить $\sigma\equiv 0$ и потому $\frac{\partial j}{\partial x}=0$, т. е. ток во всех точках одинаков и может зависеть только от времени.

Упражнения

1. а) Пусть в условиях сохранения массы $\rho=\frac{1}{1+x^2}$; каково общее выражение для $v(x, t)$? Как объяснить поведение v при $x\to\pm\infty$? б) Те же вопросы для $\rho=t^2$.

2. Как изменится соотношение (7), если дано, что частицы могут удаляться из системы, но не меняется а) количество движения порций среды или б) кинетическая энергия порций среды.

3. Проведите формальный вывод уравнения (8) из (3).

Указание. Продифференцируйте равенство (3.1) по ξ при фиксированном t.

§ 8. Уравнение неразрывности в пространстве

Перейдем теперь к выводу уравнения неразрывности в пространстве (для плоскости оно выглядит аналогично), причем будем рассматривать произвольный скалярный интегральный параметр s, не возникающий и не исчезающий в рассматриваемом процессе и обладающий потоком $\boldsymbol{q}_s$ (§ 6). Условие сохранения s означает, что для любой области (Ω) с поверхностью (σ) изменение величины s в (Ω) должно равняться количеству s, протекающему через (σ). Если вспомнить выражение из § 6 для скорости протекания s через любую поверхность, то мы приходим к интегральной записи закона сохранения:

$$\frac{d}{dt}s_{(\Omega)}=\frac{d}{dt}\int\limits_{(\Omega)}\rho_s\,d\Omega=-\int\limits_{(\sigma)}\boldsymbol{q}_s\cdot d\boldsymbol{\sigma}\qquad\left(\rho_s=\frac{ds}{d\Omega}\right);\tag{1}$$

при этом знак минус в правой части объясняется тем, что если $\boldsymbol{q}_s$ образует с $d\boldsymbol{\sigma}$ острый угол, т. е. $\boldsymbol{q}_s\cdot d\boldsymbol{\sigma}>0$, то s проходит через $(d\sigma)$ изнутри наружу, т. е. количество s в (Ω) убывает.

Чтобы перейти к дифференциальной форме закона сохранения, вспомним формулу Остроградского (см., например, ЭПМ, § X.7)

$$\oint\limits_{(\sigma)}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{\sigma}=\int\limits_{(V)}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,dV,\tag{2}$$

справедливую для любого векторного поля $\boldsymbol{A}$; здесь $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$, *дивергенция* поля $\boldsymbol{A}$,— скалярное поле, связанное с $\boldsymbol{A}$ в декартовых координатах формулой

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}=\nabla\cdot\boldsymbol{A}.$$

Дивергенция поля $\boldsymbol{A}$ равна плотности источника векторных линий этого поля, т. е. потоку вектора $\boldsymbol{A}$ через малую замкнутую поверхность, деленному на объем, ограниченный этой поверхностью.

Применяя ко второму интегралу в (1) формулу Остроградского и проводя в первом интеграле дифференцирование по t как по параметру (поскольку область (Ω) не зависит от t), получим

$$\int\limits_{(\Omega)}\left(\frac{\partial\rho_s}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{q}_s\right)d\Omega=0,$$

откуда, учитывая п р о и з в о л ь н о с т ь области (Ω),

$$\frac{\partial\rho_s}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{q}_s=0.\tag{3}$$

Это — уравнение неразрывности в дифференциальной форме, аналогичной (7.10). Умножив обе части на $d\Omega$, мы получаем из него баланс величины s в малом объеме $(d\Omega)$ (продумайте это!).

Например, если речь идет о потоке массы m, то $\rho_m=\rho$, $\boldsymbol{q}_m=\rho\boldsymbol{v}$, и уравнение неразрывности приобретает вид

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=0,\tag{4}$$

аналогичный (7.3).

Выразим последнее уравнение через полную производную по времени (§ 4). Для этого заметим, что

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\operatorname{grad}\rho, \quad (5)$$

где

$$\operatorname{grad}\rho=\frac{\partial\rho}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\rho}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\rho}{\partial z}\boldsymbol{k}=\nabla\rho$$

— *градиент* плотности (общее понятие градиента см., например, в ЭПМ, § X.2). С другой стороны,

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v})=\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x}+\frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y}+\frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z}=\left(\frac{\partial\rho}{\partial x}v_x+\frac{\partial\rho}{\partial y}v_y+\frac{\partial\rho}{\partial z}v_z\right)+$$
$$+\rho\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)=\operatorname{grad}\rho\cdot\boldsymbol{v}+\rho\operatorname{div}v.$$

Подставляя это выражение в (4) и применяя формулу (5), получаем

$$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0. \quad (6)$$

Уравнение неразрывности, полностью переписанное в лагранжевых координатах ξ, η, ζ, t, вытекает из формулы (4.7):

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\left|\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}\right|\right)=0. \quad (7)$$

Уравнение (6) нетрудно истолковать непосредственно. $\operatorname{div}\boldsymbol{v}$ есть относительная скорость расширения (увеличения объема) среды, в расчете на единицу объема. Поэтому после умножения на ρ получается относительная скорость уменьшения массы в расчете на единицу объема, т. е. скорость убывания плотности малой порции частиц в процессе движения. Различие между равносильными формами уравнений (4) и (6) особенно наглядно для стационарных полей: для них $\partial\rho/\partial t=0$, но $d\rho/dt$, вообще говоря, отлично от нуля, так как порция частиц в процессе своего движения может попадать в более разреженную зону и расширяться ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}>0$, $d\rho/dt<0$) или в более сжатую зону и сжиматься ($\operatorname{div}\boldsymbol{v}<0$, $d\rho/dt>0$).

Из уравнения (4) вытекает, в частности, что если поле $\rho(P, t)$ полностью известно, то поле массовых скоростей определено с точностью до слагаемого с нулевой дивергенцией, другими словами(см., например, ЭПМ, § XI.6), с точностью до поля вихрей вида $\operatorname{rot}\boldsymbol{\Psi}(P, t)$. Таким образом, здесь получается больший произвол, чем в одномерном случае, где такая добавка могла зависеть лишь от времени.

Если в общем уравнении (3) за характеристику s среды принять заряд e, то мы придем к уравнению неразрывности для зарядов

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t}+\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0,$$

в котором σ — плотность зарядов, а $\boldsymbol{j}$— плотность тока. Это уравнение выражает закон сохранения зарядов.

Рассмотрим еще один пример. Пусть среда с плотностью ρ находится в стационарном потенциальном силовом поле с потенциалом (отнесенным к единице массы) u. Выберем в качестве интегрального параметра среды ее полную энергию E (сумму кинетической и потенциальной энергий). Плотность энергии равна

$$\frac{dE}{d\Omega}=\frac{1}{2}\rho v^2+\rho u,$$

тогда как поток энергии получается из ответа к упражнению 1 § 6:

$$q_E=\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho u\right)\boldsymbol{v}.$$

Если полная энергия каждой порции частиц в процессе движения сохраняется (для этого, в частности, давление должно быть пренебрежимо малым), то соответствующее уравнение неразрывности приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho u\right)+\operatorname{div}\left[\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho u\right)\boldsymbol{v}\right]=0.$$

После перехода к полной производной по времени получим уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho u\right)+\left(\frac{1}{2}\rho v^2+\rho u\right)\operatorname{div}\boldsymbol{v}=0, \tag{8}$$

первый член которого, после умножения на $d\Omega$, дает изменение энергии в объеме $d\Omega$, а второй определяется изменением самого объема.

Если в условиях предыдущего абзаца не только полная энергия, но и масса сохраняются, то можно воспользоваться уравнением (6) и преобразовать равенство (8) к виду:

$$\frac{d}{dt}\left[\rho\left(\frac{1}{2}v^2+u\right)\right]-\frac{d\rho}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2+u\right)=0, \text{ т. е. } \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2+u\right)=0.$$

Таким образом, при движении каждой малой порции среды (и даже каждой отдельной частицы) выражение $\frac{1}{2}v^2+u$ остается постоянным:

$$\frac{1}{2}v^2+u=\text{const}. \tag{9}$$

Это можно было написать сразу, заметив, что сумма $\frac{1}{2}v^2\,dm+u\,dm$ как раз равна полной энергии этой порции.

Уравнение неразрывности, аналогичное (3), имеет место и для векторного интегрального параметра $\boldsymbol{s}$ (§ 6), остающегося неизменным в процессе эволюции среды, если соответственно уточнить понятие дивергенции тензора $\boldsymbol{q}_s$. Мы не станем здесь этим заниматься;

отметим, например, что уравнение неразрывности для количества движения, если последнее сохраняется, в сочетании с уравнением неразрывности для массы (4) может быть преобразовано к виду $\frac{dv}{dt}=0$, т. е. означает, что каждая частица движется с постоянной скоростью. (См. упражнения.)

Упражнения

1. Дайте формальное определение дивергенции тензора общего вида $\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}e_ie_j$ (т. е. тензора с компонентами a_{ij}) так, чтобы для этого тензора имела место формула Остроградского.

2. Докажите утверждение, приведенное в конце последнего абзаца.

§ 9. Преобразование Галилея

При решении многих задач физики приходится совершать преобразование (замену) координат. Часто такое преобразование не затрагивает времени: например, широко применяется переход от декартовых к полярным координатам на плоскости, цилиндрическим и сферическим координатам в пространстве. Такой переход обычно имеет чисто технический характер, он бывает связан с удобством написания или решения уравнений в той или иной системе координат.

Более глубокий характер имеют преобразования, затрагивающие время. Мы рассмотрим здесь одно из наиболее важных таких преобразований — преобразование Галилея, возникающее при переходе от одной инерционной системы отсчета к другой, т. е. при переходе к системе отсчета, поступательно перемещающейся относительно исходной системы с постоянной скоростью. Если обозначить скорость этого перемещения буквой $\boldsymbol{V}_0$ и предположить для простоты, что в момент $t=0$ начала координат обеих систем совпадали, то мы приходим к соотношениям $t=t'$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{V}_0t'$, т. е.

$$x=x'+V_{0x}t',\quad y=y'+V_{0y}t',\quad z=z'+V_{0z}t', \tag{1}$$

связывающим старые координаты с новыми, обозначенными штрихами. По этим формулам можно совершать переход от старой системы координат к новой в любом уравнении, включающем координаты, время или производные по ним.

В настоящее время инвариантность физических законов относительно преобразований Галилея представляется совершенно естественной и весьма широко применяется. Но в свое время это открытие, сделанное Галилеем, было крайне нетривиальным, так как решительно противоречило распространенному аристотелевскому представлению об абсолютном пространстве.