отметим, например, что уравнение неразрывности для количества движения, если последнее сохраняется, в сочетании с уравнением неразрывности для массы (4) может быть преобразовано к виду $\frac{dv}{dt}=0$, т. е. означает, что каждая частица движется с постоянной скоростью. (См. упражнения.)

Упражнения

1. Дайте формальное определение дивергенции тензора общего вида $\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}e_ie_j$ (т. е. тензора с компонентами a_{ij}) так, чтобы для этого тензора имела место формула Остроградского.

2. Докажите утверждение, приведенное в конце последнего абзаца.

§ 9. Преобразование Галилея

При решении многих задач физики приходится совершать преобразование (замену) координат. Часто такое преобразование не затрагивает времени: например, широко применяется переход от декартовых к полярным координатам на плоскости, цилиндрическим и сферическим координатам в пространстве. Такой переход обычно имеет чисто технический характер, он бывает связан с удобством написания или решения уравнений в той или иной системе координат.

Более глубокий характер имеют преобразования, затрагивающие время. Мы рассмотрим здесь одно из наиболее важных таких преобразований — преобразование Галилея, возникающее при переходе от одной инерционной системы отсчета к другой, т. е. при переходе к системе отсчета, поступательно перемещающейся относительно исходной системы с постоянной скоростью. Если обозначить скорость этого перемещения буквой $\boldsymbol{V}_0$ и предположить для простоты, что в момент $t=0$ начала координат обеих систем совпадали, то мы приходим к соотношениям $t=t'$, $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}'+\boldsymbol{V}_0t'$, т. е.

$$x=x'+V_{0x}t',\quad y=y'+V_{0y}t',\quad z=z'+V_{0z}t', \tag{1}$$

связывающим старые координаты с новыми, обозначенными штрихами. По этим формулам можно совершать переход от старой системы координат к новой в любом уравнении, включающем координаты, время или производные по ним.

В настоящее время инвариантность физических законов относительно преобразований Галилея представляется совершенно естественной и весьма широко применяется. Но в свое время это открытие, сделанное Галилеем, было крайне нетривиальным, так как решительно противоречило распространенному аристотелевскому представлению об абсолютном пространстве.

Галилей рассматривал одинаковый опыт (например, бросание тела), производимый в доме на берегу реки и в каюте равномерно движущегося по реке корабля. Инвариантность относительно преобразования Галилея равносильна одинаковости результатов опыта в этих двух ситуациях. Эта инвариантность включает в себя, в частности, закон инерции, т. е. первый закон Ньютона *). В самом деле, тело покоится в доме, если на него не действуют силы. Значит, и в каюте тело покоится, если на него не действуют силы. Но тело, которое покоится в каюте, равномерно движется относительно дома. Значит, тело равномерно движется относительно дома, если на это тело не действуют силы! Между тем, древние считали, что для равномерного движения должна быть «причина», должны действовать силы.

Ясно, что при преобразовании Галилея такие локальные параметры среды, как плотность ρ, температура ϑ, не связанные непосредственно с движением, остаются инвариантными; то же относится к производным от этих параметров по пространственным переменным, а также к таким интегральным параметрам, как масса, заряд и т. д. Напротив, скорость среды не остается инвариантной, она преобразуется по закону

$$\boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{V}_0. \tag{2}$$

Частные производные от указанных локальных параметров по времени также меняются, причем закон этого изменения легко вывести из соотношений (1):

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t'} = \frac{\partial\vartheta}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'} + \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t'} + \ldots = \frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \frac{\partial\vartheta}{\partial x}V_{0x} + \ldots = \frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \operatorname{grad}\vartheta\cdot\boldsymbol{V}_0; \tag{3}$$

впрочем, эта формула по существу совпадает с формулой (4.3). Обратите внимание, что хотя $t' = t$, но $\frac{\partial\vartheta}{\partial t'}$ вычисляется при постоянных x', y', z', а $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$ — при постоянных x, y, z; из-за этого и получилось различие производных.

Для вывода формулы преобразования потока любого интегрального параметра s заметим, что для любого элемента поверхности $(d\sigma)$, с точностью до малых высшего порядка,

$$(d^2s)' = d^2s - \rho_s \cdot V_0 dt \cdot d\sigma \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{d\sigma}}) = d^2s - \rho_s \boldsymbol{V}_0 \cdot \boldsymbol{d\sigma}\, dt$$

(продумайте эту формулу!). Деля обе части на dt, мы на основании формулы (6.3) получаем

$$\boldsymbol{q}_s' \cdot \boldsymbol{d\sigma} = \boldsymbol{q}_s \cdot \boldsymbol{d\sigma} - \rho_s \boldsymbol{V}_0 \cdot \boldsymbol{d\sigma} = (\boldsymbol{q}_s - \rho_s \boldsymbol{V}_0) \cdot \boldsymbol{d\sigma},$$

---

*) Обратите внимание на то, что Ньютон жил приблизительно на 100 лет позже Галилея.

откуда в силу произвольности $d\sigma$

$$q'_s = q_s - \rho_s V_0. \tag{4}$$

В частности, если $q_s = \rho_s \boldsymbol{v}$, формула (4) равносильна (2). В этом случае получаем, что если система отсчета движется со скоростью вещества (т. е. $V_0 = \boldsymbol{v}$), то поток в рассматриваемой точке пространства в рассматриваемый момент времени равен нулю.

Мы предоставляем читателю, применяя формулы (3) и (4), убедиться в том, что уравнение неразрывности (8.3) при галилеевой замене переменных сохраняет свою форму; впрочем, эта инвариантность ясна и без всяких выкладок (почему?).

Отметим, что стационарность поля (т. е. неизменяемость его во времени), вообще говоря, неинвариантна относительно преобразований Галилея: стационарное неоднородное поле после такого преобразования может стать нестационарным. Отсюда следует, что и обратно: некоторые нестационарные поля после преобразования Галилея могут стать стационарными, другими словами, они описывают стационарную картину в подвижной системе отсчета. (Конечно, в подавляющем большинстве нестационарные поля являются «истинно нестационарными», т. е. остаются нестационарными в любой галилеевой системе отсчета.) Укажем условия такой «скрытой стационарности» одномерного поля $\vartheta(x, t)$: из формулы (3), приравнивая левую часть нулю, получим $\frac{\vartheta'_t}{\vartheta'_x} = -v_0 = \text{const}$, откуда с помощью дифференцирования по x и t приходим к требуемым условиям:

$$\vartheta''_{xt}\vartheta'_x \equiv \vartheta''_{xx}\vartheta'_t, \quad \vartheta''_{tt}\vartheta'_x \equiv \vartheta''_{xt}\vartheta'_t.$$

Существенно заметить, что кинетическая энергия T среды из частиц (в отличие от потенциальной) неинвариантна относительно преобразования Галилея:

$$T' = \frac{1}{2}\int \rho v'^2\, dx = \frac{1}{2}\int \rho\,(\boldsymbol{v} - V_0)^2\, dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int \rho v^2\, dx - \int \rho \boldsymbol{v}\cdot V_0\, dx + \frac{1}{2}\int \rho V_0^2\, dx = T - \boldsymbol{K}\cdot V_0 + \frac{1}{2} M V_0^2,$$

откуда

$$E' = E - \boldsymbol{K}\cdot V_0 + \frac{1}{2} M V_0^2,$$

где $\boldsymbol{K}$ — количество движения, а M — масса среды. В частности, если $M = \text{const}$, то полная энергия E' в подвижной системе отсчета не зависит от времени, если в исходной системе не только полная энергия, но и количество движения не зависели от времени (например, если на частицы не действуют силы). Если на частицы действуют потенциальные силы, то суммарное количество движения, вообще говоря, меняется, а тогда в подвижной системе полная энергия среды будет меняться во времени. Это находится в соответствии с тем соображением, что закон сохранения полной энергии системы справедлив, если действующее на систему потенциальное силовое поле является стационарным; однако, как мы уже упоминали, после перехода к подвижной системе отсчета стационарность поля, вообще говоря, нарушается.

Заметим в заключение, что, как выяснилось в начале XX века, свойства преобразований Галилея (формула (2)) противоречат экспериментально обнаруженному постоянству скорости света в любой инерционной системе отсчета. Оказалось, что в действительности при переходе от одной инерционной системы отсчета к другой надо пользоваться более сложными преобразованиями, чем (1),— преобразованиями Лоренца. Например, для движения по оси x со скоростью v_x соответствующие формулы имеют вид:

$$x' = \frac{x - v_x t}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{v_x}{c^2}x}{\sqrt{1 - v_x^2/c^2}},$$

где c — скорость света. Подробное обсуждение преобразований Лоренца увело бы нас слишком далеко от темы этой книги. Отметим только, что и здесь сохраняется полная эквивалентность между покоящейся и равномерно движущейся системами координат; поэтому, так же как и раньше, нельзя сказать, какая же система покоится, нет понятия абсолютного покоя. Закон инерции сохраняется. Ясно также, что для малых значений $\frac{v_x}{c}$, т. е. для малой скорости инерционных систем друг относительно друга по сравнению со скоростью света формулы преобразования Лоренца переходят в формулы преобразования Галилея.

Усложнение преобразования, необходимость замены преобразования Галилея на преобразование Лоренца следует из того, что скорость света в любой системе одинакова и притом одинакова во всех направлениях. Свет есть явление, описываемое теорией электромагнитных полей. Еще Пуанкаре отметил, что уравнения Максвелла допускают преобразование координат, выписанное выше. Однако только Эйнштейн, с его гениальным ощущением единства природы, понял, что преобразования Лоренца должны относиться не только к электромагнитному полю, но и ко всем явлениям — в частности, к механике. В этом и заключается теория относительности Эйнштейна, остающаяся справедливой независимо от всех последующих открытий новых частиц и новых полей.

Инвариантность относительно преобразований Лоренца — это не свойство одного электромагнитного поля; это свойство всей природы, найденное впервые на примере электромагнитного поля.