

### § 10. Эволюция многокомпонентной среды

Для гидродинамики и механики характерно исследование движения вещества и распределения его плотности безотносительно к составу вещества. В сущности, сама возможность такого рассмотрения составляет предмет гордости механика: все без исключения вещества подчиняются законам, им установленным.

Однако потребности химической технологии, а также и других наук (вплоть до биологии) привели к возникновению новой отрасли науки — химической гидродинамики. Для нее характерно рассмотрение систем, состоящих из частиц различного типа. Частицы эти могут превращаться одни в другие. Это могут быть, например, атомы и молекулы или ионы и электроны.

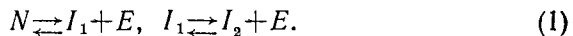
Так, в системе водород — кислород в общем случае присутствуют устойчивые молекулы  $H_2$ ,  $O_2$ ,  $H_2O$ , известные из элементарной химии; атомы  $H$ ,  $O$ ; радикалы и химически активные молекулы  $OH$ ,  $HO_2$ ,  $H_2O_2$ ,  $O_3$  (в обычных условиях количество атомов и радикалов мало). Вторым примером могут служить пары натрия; здесь в определенном интервале температур присутствуют атомы  $Na$ , электроны  $e^-$  и однократно заряженные ионы  $Na^+$ .

В подобных системах мы следим не только за общей плотностью, но и за составом среды в функции координат и времени. Для этого нужно включить уравнения взаимных превращений частиц различного сорта. В принципе скорость движения частиц разного сорта может быть различна, и возможность этого мы учтем в разбираемом ниже примере. Впрочем, если плотность среды велика, то частицы сталкиваются часто и их средняя скорость становится одинаковой. Иногда различие среднего движения разных сортов частиц описывают так: вводят общую (среднюю) скорость и, кроме того, диффузионные потоки разных сортов частиц относительно вышеуказанного общего (среднего) движения. Здесь мы этого делать не будем.

Рассмотрим типичный пример. Пусть в ионизированной среде имеются нейтральные атомы  $N$  и положительные ионы  $I_1$ ,  $I_2$  с зарядом 1 и 2 одного и того же вещества, а также электроны  $E$ , причем каждая из этих компонент имеет в каждой точке пространства определенную плотность и скорость, но эти характеристики для разных компонент неодинаковы. Обозначим плотности числа частиц (число частиц в единице объема) и скорости для каждой из этих компонент соответственно через

$$n_0, n_1, n_2, n_- \quad \text{и} \quad v_0, v_1, v_2, v_-.$$

Допустим, что в среде могут происходить реакции типа



Рассмотрим реакцию первого типа. Приняв, что концентрации не слишком велики и потому разложения отдельных нейтральных

атомов на ион и электрон происходят независимо друг от друга, получаем, что количество разлагающихся нейтральных атомов в единице объема за единицу времени пропорционально плотности этих атомов, т. е. равно  $An_0$ , где  $A$  — некоторый коэффициент пропорциональности \*). Протекание же реакции в обратную сторону определяется вероятностью встречи  $I$ -ионов с электронами, и потому скорость этого протекания, в расчете на единицу объема, пропорциональна произведению плотностей  $I$ -ионов и электронов, т. е. равна  $Bn_1n_-$ .

Подобным образом, скорость протекания реакции второго типа, в расчете на единицу объема, в направлении слева направо равна  $Cn_1$ , а в обратном направлении равна  $Dn_2n_-$ . Здесь  $B, C, D$  — некоторые коэффициенты пропорциональности.

Напишем дифференциальные уравнения рассматриваемого процесса. Для этого заметим, что для каждого отдельного вида частиц уравнение неразрывности (8.4) уже не обязательно выполняется, так как число этих частиц не сохраняется. Это уравнение должно быть изменено подобно тому, как в § 7 мы совершили переход от уравнения (10) к (12). Например, для нейтральных атомов мы получаем уравнение

$$\frac{\partial n_0}{\partial t} + \operatorname{div} (n_0 \mathbf{v}_0) = -An_0 + Bn_1n_-, \quad (2)$$

так как среда теряет нейтральные атомы с интенсивностью  $An_0$  из-за протекания первой реакции (1) слева направо и приобретает их с интенсивностью  $Bn_1n_-$  из-за протекания этой реакции справа налево. Аналогичным образом, для других компонент мы получаем уравнения (проверьте их!):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_1}{\partial t} + \operatorname{div} (n_1 \mathbf{v}_1) &= An_0 - Bn_1n_- - Cn_1 + Dn_2n_-, \\ \frac{\partial n_2}{\partial t} + \operatorname{div} (n_2 \mathbf{v}_2) &= Cn_1 - Dn_2n_-, \\ \frac{\partial n_-}{\partial t} + \operatorname{div} (n_- \mathbf{v}_-) &= An_0 - Bn_1n_- + Cn_1 - Dn_2n_-. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Уравнения (2) и (3) и образуют полную систему дифференциальных уравнений рассматриваемого процесса.

Посмотрим, какие следствия можно вывести из этой системы уравнений. Сложив первые три уравнения — отдельно левые, отдельно правые части, мы видим, что в правой части все члены взаимно унич-

---

\*) Сам по себе, без внешнего воздействия, нейтральный атом на ион и электрон не разлагается. Такое разложение может быть вызвано внешним полем излучения, которое и определяет коэффициент  $A$ , а также влияет на другие коэффициенты. Все эти коэффициенты, вообще говоря, зависят от пространственных координат и времени.

тожаются, т. е. получается

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_0 + n_1 + n_2) + \operatorname{div} (n_0 \mathbf{v}_0 + n_1 \mathbf{v}_1 + n_2 \mathbf{v}_2) = 0.$$

Сумма, стоящая в первой скобке, — это плотность совместного числа тяжелых частиц, к которым электроны не причисляются. Сумма же, стоящая во второй скобке, на основании § 6 равна потоку этого числа частиц. Таким образом, для числа тяжелых частиц выполняется уравнение неразрывности вида (8.3), т. е. мы получили закон сохранения числа тяжелых частиц.

После несложных попыток можно обнаружить еще одну комбинацию уравнений, для которой члены в правой части, обязанные своему происхождению реакциям в среде, взаимно уничтожаются. Для этого надо к первому из уравнений (3) прибавить удвоенное второе и из результата вычесть третье. Мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial t} (n_1 + 2n_2 - n_-) + \operatorname{div} (n_1 \mathbf{v}_1 + 2n_2 \mathbf{v}_2 - n_- \mathbf{v}_-) = 0. \quad (4)$$

Теперь в первых скобках стоит плотность суммарного заряда частиц (измеренная в элементарных зарядах), а во вторых скобках — поток этого заряда, т. е. плотность  $\mathbf{j}$  тока. Мы получили закон сохранения заряда.

Обычно значение  $n_1 + 2n_2 - n_-$  мало по сравнению с каждым из слагаемых, так как заряды везде малы. Положив  $n_1 + 2n_2 - n_- = 0$ , из (4) приходим к более простому соотношению  $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ .

Итак, законы сохранения получаются как следствие из уравнений процесса, в результате того, что каждый элементарный процесс удовлетворяет законам сохранения.

### ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

#### § 3

1.  $x = \xi + t.$

2.  $x = \xi e^t.$

3.  $v(\xi, t) = \xi t e^{t^2/2}.$

4.  $v(x, t) = \left(x + t + \frac{t^2}{2}\right) (t + 1)^{-1}.$

5.  $v(\xi, t) = \frac{\xi}{t} e^{t^2/2}; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{\xi}{t^2} e^{t^2/2} + \xi e^{t^2/2};$

$$v \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{v}{t} - \frac{x}{t^2} = \xi e^{t^2/2} - \frac{\xi}{t^2} e^{t^2/2} = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

6.  $b = 0; a = 0; av_0 + b = 0; a = 0.$

7. Чтобы более отчетливо различать производные, обозначим время в переменных Лагранжа буквой  $\tau$ . Дифференцируя равенства (3.1) и (3.2) по  $\xi$ , получим

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) = v'_x(x, t) \frac{\partial x}{\partial \xi}, \quad \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{t=t_0} = 1. \quad (1)$$