тожаются, т. е. получается

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_0+n_1+n_2)+\operatorname{div}(n_0\boldsymbol{v}_0+n_1\boldsymbol{v}_1+n_2\boldsymbol{v}_2)=0.$$

Сумма, стоящая в первой скобке,— это плотность совместного числа тяжелых частиц, к которым электроны не причисляются. Сумма же, стоящая во второй скобке, на основании § 6 равна потоку этого числа частиц. Таким образом, для числа тяжелых частиц выполняется уравнение неразрывности вида (8.3), т. е. мы получили закон сохранения числа тяжелых частиц.

После несложных попыток можно обнаружить еще одну комбинацию уравнений, для которой члены в правой части, обязанные своему происхождению реакциям в среде, взаимно уничтожаются. Для этого надо к первому из уравнений (3) прибавить удвоенное второе и из результата вычесть третье. Мы получим:

$$\frac{\partial}{\partial t}(n_1+2n_2-n_-)+\operatorname{div}(n_1\boldsymbol{v}_1+2n_2\boldsymbol{v}_2-n_-\boldsymbol{v}_-)=0. \qquad (4)$$

Теперь в первых скобках стоит плотность суммарного заряда частиц (измеренная в элементарных зарядах), а во вторых скобках — поток этого заряда, т. е. плотность $\boldsymbol{j}$ тока. Мы получили закон сохранения заряда.

Обычно значение $n_1+2n_2-n_-$ мало по сравнению с каждым из слагаемых, так как заряды везде малы. Положив $n_1+2n_2-n_-=0$, из (4) приходим к более простому соотношению $\operatorname{div}\boldsymbol{j}=0$.

Итак, законы сохранения получаются как следствие из уравнений процесса, в результате того, что каждый *элементарный* процесс удовлетворяет законам сохранения.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 3

1. $x=\xi+t$.
2. $x=\xi e^t$.
3. $v(\xi,\ t)=\xi t e^{t^2/2}$.
4. $v(x,\ t)=\left(x+t+\frac{t^2}{2}\right)(t+1)^{-1}$.
5. $\vartheta(\xi,t)=\frac{\xi}{t}\ e^{t^2/2};\quad \frac{d\vartheta}{dt}=-\frac{\xi}{t^2}\ e^{t^2/2}+\xi e^{t^2/2};$

$$v\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=\frac{v}{t}-\frac{x}{t^2}=\xi e^{t^2/2}-\frac{\xi}{t^2}\ e^{t^2/2}=\frac{d\vartheta}{dt}.$$

6. $b=0;\ a=0;\ av_0+b=0;\ a=0.$
7. Чтобы более отчетливо различать производные, обозначим время в переменных Лагранжа буквой τ. Дифференцируя равенства (3.1) и (3.2) по ξ, получим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)=v'_x(x,\ t)\frac{\partial x}{\partial\xi},\quad \left.\frac{\partial x}{\partial\xi}\right|_{t=t_0}=1. \qquad (1)$$

При $\xi=\xi_0$ коэффициент $v'_x(x, t)$ обращается в известную функцию $v'_x(x_0(t), t)$. Рассматривая равенства (1) как дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными и начальное условие относительно $\frac{\partial x}{\partial \xi}$ и решая получающуюся задачу с начальным условием, находим

$$\frac{\partial x}{\partial \xi}=\exp\int_{t_0}^{t} v'_x(x_0(t), t)\,dt=\exp\int_{t_0}^{\tau} v'_x(x_0(t), t)\,dt$$

(так как $t=\tau$). Далее, очевидно,

$$\frac{\partial x}{\partial \tau}=v(x_0(\tau), \tau), \quad \frac{\partial t}{\partial \xi}=0, \quad \frac{\partial t}{\partial \tau}=1.$$

8. Здесь $x_0(t)\equiv 0$, откуда вдоль рассматриваемой траектории $\frac{\partial x}{\partial \xi}=e^{t^2/2}$, $\frac{\partial x}{\partial \tau}=0$, $\frac{\partial t}{\partial \xi}=0$, $\frac{\partial t}{\partial \tau}=1$. Интересно, что в данном примере решение $x(\xi, \tau)$ нельзя выписать в квадратурах.

9. $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}=\frac{\partial \vartheta}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t}+\frac{d\vartheta}{dt}\cdot 1$; однако, продифференцировав равенство $\xi=\xi(x, t)$ по t при фиксированном ξ, получаем: $0=\frac{\partial \xi}{\partial x}v+\frac{\partial \xi}{\partial t}$. Выразив отсюда $\frac{\partial \xi}{\partial t}$ и подставив результат в первое равенство, получаем формулу (3.6).

§ 4

1. $x=\xi+t$, $y=\eta$.
2. $x=\xi e^{\alpha t}$, $y=\eta e^{\alpha t}$.
3. Решая систему уравнений $\frac{dx}{dt}=-y$, $\frac{dy}{dt}=x$ при начальных условиях $x|_{t=0}=\xi$, $y|_{t=0}=\eta$, получаем $x=\xi\cos t-\eta\sin t$, $y=\xi\sin t+\eta\cos t$, откуда $\boldsymbol{v}(\xi, \eta, t)=-(\xi\sin t+\eta\cos t)\,\boldsymbol{i}+(\xi\cos t-\eta\sin t)\,\boldsymbol{j}$, $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\equiv 1$. Движение среды реализуется вращением плоскости как целого вокруг начала координат; при этом площади не меняются.
4. $\boldsymbol{v}=\frac{\sin t}{3-\cos t}\boldsymbol{r}$; траекторией служит отрезок с концами $(\xi; \eta)$ и $(2\xi; 2\eta)$.
5. $\frac{D(x', y')}{D(x, y)}\equiv 4$; отображение состоит в равномерном растяжении плоскости в два раза, при котором площади увеличиваются в 4 раза.
6. $\frac{D(x', y')}{D(x, y)}=1$ при $xy>0$ и $=-1$ при $xy<0$. Точки первого квадранта остаются на месте, второй и четвертый квадрант испытывает зеркальное отражение, третий — поворот на 180°.
7. Если точка M имеет координаты ξ, η, а M' — координаты x, y, то $x=R^2\xi(\xi^2+\eta^2)^{-1}$, $y=R^2\eta(\xi^2+\eta^2)^{-1}$, $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}=-R^4(\xi^2+\eta^2)^{-2}$. Отрицательность якобиана согласуется с тем, что направление обхода каждой малой окружности (кроме окружностей, содержащих внутри себя начало координат, которое для данного отображения является особой точкой) после отображения меняется на противоположное.

8. Воспользовавшись формулой для объема параллелепипеда, построенного на трех заданных векторах (см., например, ЭПМ, § XI.1), получаем, что искомый коэффициент равен

$$\left|\begin{vmatrix} x'_\xi & y'_\xi & z'_\xi \\ x'_\eta & y'_\eta & z'_\eta \\ x'_\zeta & y'_\zeta & z'_\zeta \end{vmatrix}\right| = \left|\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}\right|,$$

где x, y, z — эйлеровы, ξ, η, ζ — лагранжевы пространственные координаты. Якобиан положителен, если после эволюции правая тройка бесконечно малых векторов остается правой, а левая — левой, и отрицателен, если правая тройка становится левой, а левая — правой.

§ 5

$$\rho = m_0\delta(x-\varphi(t;\ \xi_0, \eta_0))\,\delta(y-\psi(t;\ \xi_0, \eta_0)) = \\ = m_0\left[\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right]^{-1}_{\substack{\xi=\xi_0 \\ \eta=\eta_0}} \delta(\xi-\xi_0)\delta(\eta-\eta_0)$$

при очевидном смысле участвующих букв.

§ 6

1. $q_\Omega = \boldsymbol{v}$; $q_T = \frac{1}{2}\rho v^2\boldsymbol{v}$; $q_U = \rho u\boldsymbol{v}$.

2. $q_G = \rho(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v})\,\boldsymbol{v}$ (не путать с векторно-скалярным произведением!).

§ 7

1. а) $v = (1+x^2)\,\varphi(t)$, где $\varphi(t)$ — произвольная функция; для стационарного потока $v = C(1+x^2)$ ($C = \text{const}$). Так как плотность не зависит от времени, то поток массы должен быть во всех точках оси x одинаков; но при $x\to\pm\infty$ плотность стремится к нулю, а потому скорость должна стремиться к бесконечности. б) $v = \varphi(t) - \frac{2x}{t}$. Так как с ростом t плотность увеличивается, причем одинаково на всей оси x, то частицы должны «нагнетаться» из бесконечности, откуда $v \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \mp\infty$.

2. а) $\rho(x)\,[v(x)]^2 = \text{const}$;
   б) $\rho(x)\,[v(x)]^3 = \text{const}$.

3. Из уравнения (7.3) получаем:

$$v\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

В силу формулы (3.5) сумма первых двух членов равна $\frac{d\rho}{dt}$. Дифференцируя формулу (3.1) по ξ, получим: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right) = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\xi}$, откуда $\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)$. Таким образом, мы приходим к равенству

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right) = 0,$$

из которого легко вытекает соотношение (7.8).

§ 8

1. Имеем:

$$\int\limits_{(\sigma)}\Big(\sum_{i,j} a_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j\Big)\cdot \boldsymbol{d\sigma}=\sum_i \boldsymbol{e}_i \int\limits_{(\sigma)}\Big(\sum_j a_{ij}\boldsymbol{e}_j\Big)\cdot \boldsymbol{d\sigma}=\sum_i \boldsymbol{e}_i \int\limits_{(\Omega)} \operatorname{div}\sum_j a_{ij}\boldsymbol{e}_j\, d\Omega,$$

откуда

$$\operatorname{div}\sum_{i,j} a_{ij}\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j=\sum_i\Big(\operatorname{div}\sum_j a_{ij}\boldsymbol{e}_j\Big)\boldsymbol{e}_i=\sum_{i,j}\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i.$$

Обратите внимание, что дивергенцией тензора служит вектор.

2. Уравнение неразрывности для количества движения имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\boldsymbol{v})+\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})=0. \qquad (2)$$

Так как $\boldsymbol{v}=\sum\limits_i v_i\boldsymbol{e}_i$, то $\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}=\sum\limits_{i,j} v_iv_j\boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j$ и в силу решения упражнения 1

$$\operatorname{div}(\rho\boldsymbol{v}\boldsymbol{v})=\sum_{i,j}\frac{\partial(\rho v_iv_j)}{\partial x_j}\boldsymbol{e}_i=\sum_j\frac{\partial(\rho v_j\boldsymbol{v})}{\partial x_j}.$$

Подставляя это выражение в формулу (2) и раскрывая производную произведения, получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}\boldsymbol{v}+\rho\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\sum_j\frac{\partial(\rho v_j)}{\partial x_j}\boldsymbol{v}+\sum_j\rho v_j\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x_j}=0.$$

Первый член здесь взаимно уничтожается с третьим в силу уравнения неразрывности (8.4) для массы. Сумму оставшихся членов можно переписать в виде

$$\rho\Big(\frac{\partial}{\partial t}+\sum_j v_j\frac{\partial}{\partial x_j}\Big)\boldsymbol{v}=\rho\Big[\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\Big]=\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt},$$

и так как она равна нулю, то $\dfrac{d\boldsymbol{v}}{dt}=0$, что и утверждалось.