ГЛАВА II

ДВИЖЕНИЯ С ЗАДАННЫМИ СКОРОСТЯМИ НА ПРЯМОЙ

Задача о построении одномерной среды из частиц, движущихся с заданными скоростями — это одна из наиболее простых задач подобного рода, на которой, тем не менее, наглядно проявляется ряд более общих черт. Поэтому мы займемся ею в первую очередь.

§ 1. Введение

Итак, пусть скорости частиц, составляющих среду, заданы. Но что, собственно, это означает — ведь, вообще говоря, скорости различных частиц различны и не постоянны во времени? Уточнение этого вопроса приводит к двум различным постановкам задачи.

В первой постановке должна быть задана скорость каждой частицы как функция времени. Можно себе представить, что каждая частица имеет собственный моторчик, закон работы которого задан. Так как в силу § I.3 частицы в одномерном случае различаются значением лагранжевой координаты ξ, то дифференциальное уравнение движения частиц в рассматриваемой постановке задачи имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=F(t;\ \xi), \tag{1}$$

а начальное условие — вид

$$x|_{t=t_0}=\xi. \tag{2}$$

Интегрирование уравнения (1) при условии (2) не вызывает труда: так как ξ в процессе интегрирования остается постоянным, то

$$x=x(t;\ \xi)=\xi+\int_{t_0}^{t} F(t;\ \xi)\,dt. \tag{3}$$

На рис. 6 изображен возможный вид двух графиков получающейся зависимости $x(t)$, отвечающих различным зафиксированным значениям ξ *).

Обратите внимание, что в общем случае нет никаких причин, препятствующих различным таким графикам пересекаться друг с другом. В самом деле, так как законы движения различных частиц между собой никак не связаны и частицы друг с другом не взаимодействуют, то ничто не мешает частицам обгонять одна другую в процессе движения. Получается такая картина, как будто когда одна частица в своем движении настигает какую-либо другую, то проходит сквозь нее, как сквозь привидение, не ощущая никакого воздействия. Так будет, если рассматриваемая система частиц имеет разброс в направлениях y, z, поперечных оси x, позволяющий частицам обгонять одна другую без столкновений, и в то же время настолько малый, что систему можно в остальных отношениях считать одномерной. Такое проникновение можно истолковать и иначе, считая, что разброс системы в направлениях, поперечных оси x, не мал, но мы для простоты, отвлекаясь от двух других координат, проектируем всю картину на ось x, параллельно которой движутся все частицы.

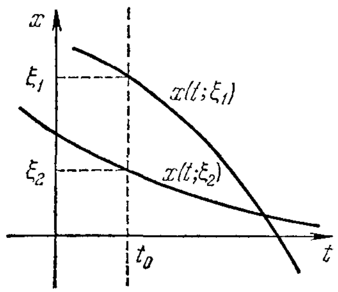

Рис. 6.

Более подробно вопрос о возможности обгона частицами друг друга мы разберем в § 10.

Во второй постановке задачи скорость частицы в каждый момент времени задается как функция координаты данной частицы в этот момент времени; другими словами, задается (вообще говоря, нестационарное) поле скоростей движения среды. Здесь можно себе представить, что моторы стоят на берегу потока и каждый из них разгоняет этот поток по своему закону, известному для каждого мотора. Возможен и случай, когда зависимость $v(x, t)$ измеряется в процессе эксперимента и, тем самым, становится нам известной.

(Заметим еще, что в дальнейшем x не обязано быть геометрической координатой, x может быть некоторым скалярным параметром частиц, скорость изменения которого в зависимости от уровня этого параметра и времени нам известна. Например, в качестве «среды» можно рассмотреть совокупность всех звезд данной массы во Вселенной, а буквой x обозначить светимость звезды. Представив

*) Горизонтальное, как на рис. 6, расположение оси t приводит к естественному виду графиков законов движения частиц. Однако позже мы увидим, что при рассмотрении движения среды применяется и вертикальное расположение оси t, которое также имеет свои преимущества.

себе ось светимостей, мы можем изображать звезды движущимися точками на этой оси; таким образом, и в этом случае x удобно интерпретировать как геометрическую координату, что мы будем в дальнейшем делать без особой оговорки.)

Дифференциальное уравнение движения частиц, взамен (1), теперь принимает вид

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ t), \tag{4}$$

тогда как начальное условие продолжает иметь вид (2). Теперь уже невозможно в общем виде написать закон движения $x(t;\ \xi)$ отдельных частиц, наподобие (3), в явном виде, так как для этого нужно решить дифференциальное уравнение 1-го порядка общего вида (4), что в аналитическом виде удается сделать только в отдельных специальных случаях (см. § 2). Уравнение (4) задает на плоскости x, t поле направлений, каждая из интегральных линий которого и изображает закон движения соответствующей частицы (рис. 7). Так как через каждую точку плоскости x, t проходит ровно одна интегральная кривая, то различные частицы в процессе своего движения не могут настигать и, тем более, обгонять одна другую. (Продумайте это свойство для интерпретации с моторами на берегу, сделанной выше. Отметим, что в § 12 мы познакомимся с исключениями из этого правила.)

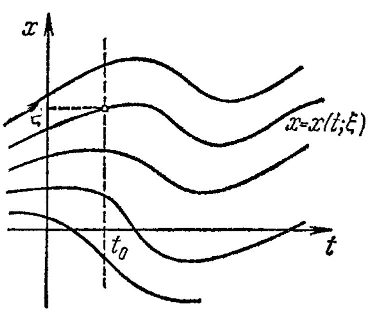

Рис. 7.

Мы будем рассматривать обе постановки задачи параллельно.

§ 2. Специальные случаи интегрируемости

Решение уравнения (1.4) при начальном условии (1.2) подробно рассматривается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка (см., например, ЭПМ, §§ VII. 1—2). Напомним некоторые специальные случаи, в которых интегрирование удается осуществить в аналитическом виде.

1. Пусть заданная скорость не зависит от координаты, а зависит только от времени, т. е. $f=f(t)$. Тогда решение имеет вид

$$x-\xi=\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt, \quad \text{т. е.} \quad x=\xi+\int_{t}^{t} f(t)\,dt.$$

В этом случае среда движется как абсолютно твердое тело, т. е. закон изменения $\Delta x=x-\xi$ не зависит от значения ξ (рис. 8), а