себе ось светимостей, мы можем изображать звезды движущимися точками на этой оси; таким образом, и в этом случае x удобно интерпретировать как геометрическую координату, что мы будем в дальнейшем делать без особой оговорки.)

Дифференциальное уравнение движения частиц, взамен (1), теперь принимает вид

$$\frac{dx}{dt}=f(x,\ t), \tag{4}$$

тогда как начальное условие продолжает иметь вид (2). Теперь уже невозможно в общем виде написать закон движения $x(t;\ \xi)$ отдельных частиц, наподобие (3), в явном виде, так как для этого нужно решить дифференциальное уравнение 1-го порядка общего вида (4), что в аналитическом виде удается сделать только в отдельных специальных случаях (см. § 2). Уравнение (4) задает на плоскости x, t поле направлений, каждая из интегральных линий которого и изображает закон движения соответствующей частицы (рис. 7). Так как через каждую точку плоскости x, t проходит ровно одна интегральная кривая, то различные частицы в процессе своего движения не могут настигать и, тем более, обгонять одна другую. (Продумайте это свойство для интерпретации с моторами на берегу, сделанной выше. Отметим, что в § 12 мы познакомимся с исключениями из этого правила.)

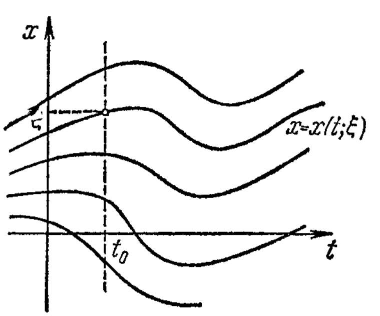

Рис. 7.

Мы будем рассматривать обе постановки задачи параллельно.

§ 2. Специальные случаи интегрируемости

Решение уравнения (1.4) при начальном условии (1.2) подробно рассматривается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка (см., например, ЭПМ, §§ VII. 1—2). Напомним некоторые специальные случаи, в которых интегрирование удается осуществить в аналитическом виде.

1. Пусть заданная скорость не зависит от координаты, а зависит только от времени, т. е. $f=f(t)$. Тогда решение имеет вид

$$x-\xi=\int_{t_0}^{t} f(t)\,dt, \quad \text{т. е.} \quad x=\xi+\int_{t}^{t} f(t)\,dt.$$

В этом случае среда движется как абсолютно твердое тело, т. е. закон изменения $\Delta x=x-\xi$ не зависит от значения ξ (рис. 8), а для любых двух решений $x_1(t)$ и $x_2(t)$ разность $x_1(t) - x_2(t)$ не зависит от t.

2. Пусть заданная скорость не зависит от времени (такой случай называется *автономным*), т. е. $f = f(x)$. Тогда решение получается с помощью разделения переменных:

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad \frac{dx}{f(x)} = dt, \quad \int\limits_{\xi}^{x} \frac{dx}{f(x)} = t - t_0;$$

последнее уравнение еще надо разрешить относительно x, что даст $x = x(t - t_0; \xi)$. Так как значения t и t_0 входят в закон движения не

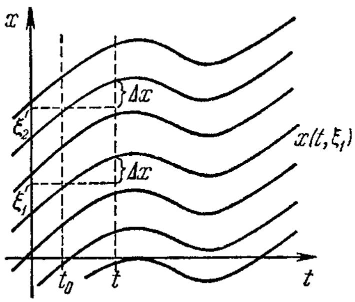

Рис. 8.

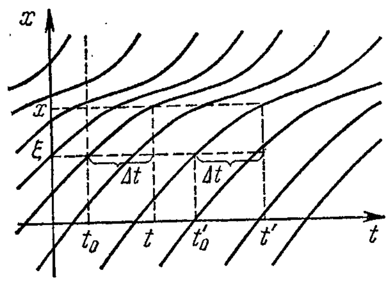

Рис. 9.

произвольно, а в виде разности $\Delta t = t - t_0$, то получаем, что *в автономном случае каждое движение допускает произвольный сдвиг во времени*: если $x(t)$ — решение, то и $x(t - \text{const})$ — также решение. Впрочем, это непосредственно ясно и из определения автономности (продумайте это!). Возможная картина расположения интегральных линий в автономном случае показана на рис. 9.

Введем в автономном случае потенциал скорости

$$V(x) = -\int^{x} f(x)\,dx;$$

нижний предел несуществен, так как потенциал определен с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Тогда дифференциальное уравнение движения можно переписать в виде

$$\frac{dx}{dt} = -V'(x) \qquad \left({}' = \frac{d}{dx}\right).$$

Таким образом, $x(t)$ возрастает для тех значений x, при которых $V(x)$ убывает, и убывает там, где $V(x)$ возрастает (см. рис. 10, где стрелки на оси x показывают направление изменения $x(t)$). Каждая из точек минимума функции $V(x)$ (на рис. 10 точка a_1) служит положением асимптотически устойчивого равновесия, к которому при

$t \to \infty$ стремится координата любой достаточно близкой точки. Каждая из точек максимума функции $V(x)$ (на рис. 10 точка a_2) служит положением неустойчивого равновесия. (Простые понятия, связанные с устойчивостью решения, см., например, в ЭПМ, § VII.6.)

3. Разобранный автономный случай, вообще говоря, нелинейный. Однако он имеет важный частный подслучай, когда поле скоростей меняется по линейному закону, т. е. $f(x)=kx$ ($k=\text{const}$). Соответствующее уравнение $\dot{x}=kx$ легко интегрируется, что дает

$$x(t)=\xi e^{k(t-t_0)}. \tag{1}$$

При $k<0$ потенциал $V(x)=\frac{|k|}{2}x^2$ имеет точку минимума $x=0$. Из любого начального положения частица стремится к этой точке с экспоненциально затухающей скоростью.

4. Рассмотрим, наконец, комбинированный случай $f(x, t)=$ $=kx+\varphi(t)$. Соответствующее уравнение (1.4)

$$\dot{x}-kx=\varphi(t) \tag{2}$$

при начальном условии (1.2) легко решить по так называемому методу вариации произвольной постоянной (см., например, ЭПМ, § VII. 2) или с помощью представления $\dot{x}-kx=e^{kt}\frac{d}{dt}(e^{-kt}x)$. Мы здесь воспользуемся менее формальным, хотя в данном примере и более длинным способом, основанным на применении дельта-функции времени (называемой также *импульсной функцией*; см. § I.5).

Искомое решение представляет собой сумму решения $\bar{x}(t)$ однородного уравнения $\dot{x}-kx=0$ при начальном условии (1.2) и решения $X(t)$ уравнения (2) при однородном начальном условии

$$X|_{t=t_0}=0. \tag{3}$$

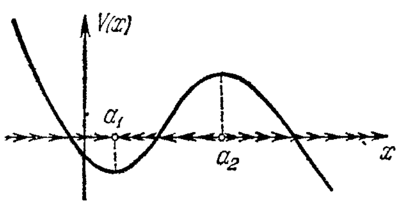

Рис. 10.

Так как $\bar{x}(t)$ задается формулой (1), то остается найти $X(t)$.

Для этого напомним общий принцип построения *функции влияния* (она же называется *функцией Грина*; более подробно см. в ЭПМ, § VI. 2). Пусть внешнее воздействие на какой-либо объект описывается функцией $f(t)$ (это может быть функция одной или нескольких переменных, которые могут иметь любой физический смысл, но мы для определенности будем говорить о функциях одной переменной — времени), а результат этого воздействия — функцией $F(s)$. Тогда говорят, что задан *оператор* преобразования функции-*прообраза* f в функцию-*образ* F; обозначив этот оператор через L, можно написать $F=Lf$. Если при этом действует *принцип суперпозиции*, т. е.

при сложении внешних воздействий их результаты также складываются, то оператор называется *линейным* (формальное определение линейности можно записать так: $L(f_1+f_2)=Lf_1+Lf_2$, $L(Cf)=CLf$, где $C=\text{const}$). Построение функции влияния возможно только для линейного оператора, и мы будем предполагать в дальнейшем, что заданный оператор L линеен.

Обозначим через $G(s;\tau)$ результат воздействия на систему единичного импульса, приложенного в момент τ, т. е. $G(s;\tau)=L(\delta(t-\tau))$, где δ — дельта-функция (§ I.5). G и есть функция влияния для оператора L, через нее нетрудно записать результат применения этого оператора к любой функции f. В самом деле, представив $f(t)$ в виде непрерывной последовательности бесконечно малых импульсов $f(\tau)d\tau\delta(t-\tau)$ и воспользовавшись принципом суперпозиции, получаем

$$L(f(t))=L\int(f(\tau)\,d\tau)\,\delta(t-\tau)=\int L\,[(f(\tau)\,d\tau)\,\delta(t-\tau)]=$$
$$=\int G(s,\tau)\,f(\tau)\,d\tau. \qquad (4)$$

Вернемся к построению функции $X(t)$. Так как при сложении функции φ и решения X складываются (именно для этого мы и перешли к однородному начальному условию (3)), то можно применить построение функции влияния. Решение $G(t;\tau)$ уравнения

$$\dot{x}-kx=\delta(t-\tau)\quad(\tau>t_0) \qquad (5)$$

при начальном условии (3) будет при $t<\tau$ равняться нулю, а при $t>\tau$ удовлетворять уравнению $\dot{x}-kx=0$ и начальному условию $x(\tau+0)=1$ (чтобы получить последнее, надо проинтегрировать обе части уравнения (5) от $\tau-0$ до $\tau+0$). Поэтому в силу формулы (1)

$$G(t;\tau)=\begin{cases}0 & (t_0\leqslant t<\tau),\\ e^{k(t-\tau)} & (\tau<t<\infty).\end{cases}$$

Применяя общую формулу (4), получим

$$X(t)=\int_{t_0}^{\infty}G(t,\tau)\,\varphi(\tau)\,d\tau=\int_{t_0}^{t}e^{k(t-\tau)}\,\varphi(\tau)\,d\tau;$$

эта же формула справедлива и при $t<t_0$. Окончательно получаем

$$x(t)=\bar{x}(t)+X(t)=\xi e^{k(t-t_0)}+\int_{t_0}^{t}e^{k(t-\tau)}\,\varphi(\tau)\,d\tau. \qquad (6)$$

Упражнение

Напишите функцию Грина для задачи $\dot{x}+b(t)\,x=f(t)$, $x|_{t=t_0}=0$, а затем с помощью этой функции — и само решение.