§ 3. Среда с постоянным для каждой частицы локальным параметром. Понятие характеристики

Пусть, как в § I.1, частицы, составляющие рассматриваемую среду, обладают некоторым скалярным локальным параметром $\vartheta = \vartheta(x, t)$ — например, будем вести речь о температуре. Основную идею дальнейших математических построений нетрудно понять при рассмотрении самой простой ситуации, когда эволюция поля температур происходит только за счет перемещения частиц (их можно представлять себе, скажем, в виде шариков), каждая из которых имеет определенную температуру, без обмена теплотой между частицами. Мы уже упоминали об этой ситуации в § I.3.

При принятом нами предположении температура каждой частицы будет оставаться неизменной, что математически можно записать с помощью уравнения

$$\frac{d\vartheta}{dt} = 0, \tag{1}$$

где $\frac{d}{dt}$ — полная производная по времени (§ I.3). Вспоминая формулу (I. 3.5), выражающую эту производную через частные производные по x и t, приходим к дифференциальному уравнению для поля температур

$$v(x, t)\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = 0. \tag{2}$$

Как и прежде, поле скоростей, т. е. функцию $v(x, t)$ будем считать известными, нашей целью будет определение поля температур $\vartheta(x, t)$.

Уравнение (2) принадлежит к классу *линейных дифференциальных уравнений с частными производными 1-го порядка*. Как и каждое дифференциальное уравнение, оно имеет бесконечное количество решений, и, чтобы получить одно определенное решение, надо задать необходимые дополнительные условия. С другой стороны, и из смысла задачи ясно, что при заданном поле скоростей поле температур может получиться различным, например, в зависимости от его начального состояния. Таким образом, мы приходим к дополнительному *начальному условию*

$$\vartheta|_{t=t_0} \equiv \vartheta(x, t_0) = \vartheta_0(x), \tag{3}$$

и задача сводится к отысканию такого решения уравнения (2), которое удовлетворяет заданному начальному условию (3); такая задача называется *задачей с начальным условием* или *задачей Коши*.

При решении поставленной задачи существует опасность пойти по нерациональному пути. Именно, вспомним, что при построении численного решения (обыкновенного!) дифференциального уравнения для процесса с конечным числом степеней свободы полезным оказывается переход к дискретным шагам по времени на основе замены производной по времени разностным отношением. Поэтому можно было бы попытаться заменить в уравнении (2) $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$ на $\frac{\vartheta(x, t_1)-\vartheta(x, t_0)}{t_1-t_0}$, где t_1 больше t_0 и близко к t_0; вспомнив условие (3) и заменив $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$ на первом шаге значением этой производной при $t=t_0$, т. е. значением $\vartheta_0'(x)$, получим приближенное выражение

$$\vartheta(x, t_1)=\vartheta_0(x) - \vartheta_0'(x)\, v(x, t_0)\,(t_1-t_0). \tag{4}$$

Найдя $\vartheta(x, t_1)$, можно взять t_1 вместо t_0, что для значения $t_2>t_1$, близкого к t_1, приведет к приближенному выражению

$$\vartheta(x, t_2)=\vartheta(x, t_1)-\vartheta_x'(x, t_1)\, v(x, t_1)\,(t_2-t_1), \tag{5}$$

и т. д. По форме получается тот самый метод Эйлера, который после некоторого усовершенствования с успехом применяется при решении обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, ЭПМ, § VIII.6).

Однако более подробный анализ обнаруживает слабые стороны этого, казалось бы, естественного способа построения решения. Мы не будем уже говорить о том, что решение, даже в простых ситуациях, не получается в виде формулы — такова судьба всех численных методов. Но вот реальная опасность: значения решения на каждом шаге получаются с помощью *дифференцирования* значений, взятых из предыдущего шага, в результате чего погрешности в данных задачи, а также погрешности вычислений могут при переходе от шага к шагу безудержно разрастаться (см. об этом в ЭПМ, § II.2). Эта опасность особенно серьезна, если, например, начальная функция $\vartheta_0(x)$ имеет разрывы или изломы (разрывы производной), так как тогда в правых частях формул (4), (5) и т. д. появляются дельта-слагаемые и их производные, которых на самом деле не должно быть в решении.

Другим недостатком описанного метода — во всяком случае, в приведенном его варианте — является то, что он неправильно передает качественный характер решения, например, зависимость решения от $\vartheta_0(x)$. Так, например, пусть дано, что $\vartheta_0(x)\equiv 0$ на некотором интервале (a, b). Тогда из формул (4), (5) и т. д. последовательно находим, что все $\vartheta(x, t_k)\equiv 0$ на (a, b), т. е. получается, как будто и решение $\vartheta(x, t)\equiv 0$ при $a<x<b$, а это на самом деле, как мы вскоре увидим, *неверно*.

Чтобы избежать последовательных дифференцирований, можно было бы взамен равенства (4) написать

$$\vartheta(x, t_1)=\vartheta_0(x)-v(x, t_0)\,(t_1-t_0)\,\frac{\vartheta_0(x+h)+\vartheta_0(x-h)}{2h} \tag{6}$$

и аналогично изменить последующие формулы. Но и в этом случае получается неправильная качественная картина — как будто значение ϑ в последующий момент времени зависит от значений ϑ в предыдущий момент в двух точках среды, тогда как на самом деле влияет всего одна точка, причем не отвечающая формуле (6).

Все сказанное оправдывает переход к принципиально иному методу решения рассматриваемой задачи, основанному на применении лагранжевых координат (§ I.3). Если вдуматься, это представляется довольно естественным: в самом деле, рассматриваемое уравнение (2) выведено при определенном предположении о характере взаимодействия частиц, так что естественно воспользоваться координатами, приспособленными к тому, чтобы следить за судьбой отдельных частиц.

Для исследуемой задачи картина весьма проста. Именно, в силу формулы (I.3.5) уравнение (2), после перехода к лагранжевым переменным, т. е. рассматриваемое «вдоль движущейся частицы», приобретает вид (1). (Таким образом, в данной задаче попросту не надо было переходить от (1) к (2); мы это сделали, имея в виду дальнейшее.) Поэтому $\vartheta(\xi, t)$ не может зависеть от t, т. е.

$$\vartheta = A(\xi), \tag{7}$$

где $A(\xi)$ — пока произвольная функция; это *общее решение* уравнения (1), что очевидно и из смысла физической задачи (почему?). Чтобы удовлетворить начальному условию (3), положим в (7) $t=t_0$ и учтем, что $x|_{t=t_0}=\xi$; мы получим

$$A(\xi) = \vartheta|_{t=t_0} = \vartheta_0(x)|_{t=t_0} = \vartheta_0(\xi).$$

Итак, функция $A(\xi)$ найдена и искомое решение задачи (2) — (3) в координатах Лагранжа имеет вид

$$\vartheta = \vartheta_0(\xi). \tag{8}$$

Получив решение, мы можем выразить его в эйлеровых координатах. Для этого обозначим через $x=\varphi(t;\ t_1,\ x_1)$ закон движения частицы, которая в момент t_1 находилась в точке x_1, другими словами, это решение дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = v(x, t) \qquad (9) = (I.3.1)$$

при начальном условии $x(t_1)=x_1$. Тогда можно написать

$$\xi = \varphi(t_0;\ t,\ x)$$

(почему?), т. е. в силу (8) требуемое выражение решения имеет вид

$$\vartheta = \vartheta_0(\varphi(t_0;\ t,\ x)). \tag{10}$$

Интегральные линии уравнения (9) на *мировой плоскости* x, t, т. е. графики движения частиц при заданном поле скоростей $v(x, t)$, называются *характеристиками**) уравнения с частными производными (2); это не что иное, как координатные линии $\xi=\mathrm{const}$ системы лагранжевых координат ξ, t. Результат нашего исследования уравнения (2) можно сформулировать так: *решения этого уравнения должны быть постоянными вдоль каждой из его характеристик.*

К этому же выводу нетрудно прийти, заменяя производные в уравнении (2) на разностные отношения. В самом деле, будем пользоваться при этой замене точками (x, t), $(x+\Delta x, t)$ и $(x+\Delta x, t+\Delta t)$. Тогда уравнение (2) надо переписать в виде

$$v(x, t)\frac{\vartheta(x+\Delta x, t)-\vartheta(x, t)}{\Delta x}+\frac{\vartheta(x+\Delta x, t+\Delta t)-\vartheta(x+\Delta x, t)}{\Delta t}=0,$$

откуда

$$\vartheta(x+\Delta x, t+\Delta t)=\vartheta(x+\Delta x, t)-\frac{\Delta t}{\Delta x}v(x, t)[\vartheta(x+\Delta x, t)-\vartheta(x, t)]. \quad (11)$$

Попробуем подобрать соотношение между Δt и Δx таким, чтобы значение ϑ в момент $t+\Delta t$ зависело только от одного значения ϑ в момент t. Для этого $\vartheta(x+\Delta x, t)$ в правой части (11) должно пропасть, откуда

$$\frac{\Delta t}{\Delta x}v(x, t)=1, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t}=v(x, t) \quad \text{и} \quad \vartheta(x+\Delta x, t+\Delta t)=\vartheta(x, t).$$

Из предпоследнего равенства мы получаем, что при переходе от точки (x, t) к точке $(x+\Delta x, t+\Delta t)$ мы должны следовать характеристике (уравнению (9)), а из последнего равенства — что при этом значение ϑ остается постоянным.

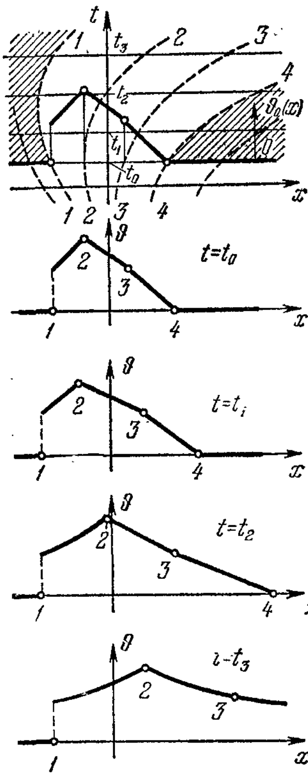

Рис. 11.

На верхнем рис. 11 пунктиром показано возможное расположение характеристик на плоскости x, t; конечно, показано лишь несколько характеристик, на самом деле они сплошь заполняют плоскость. Ось t здесь удобно расположить вертикально (см. сноску к § 1). Пусть функция $\vartheta_0(x)$ имеет такой график, как показано на этом же рисунке. Тогда в силу предыдущего ее значения «сносятся»

*) Этот термин представляется не вполне удачным, так как он имеет и иное, «общечеловеческое» значение; но он так распространен, что изменить его не представляется возможным.

вдоль характеристик без изменения. В частности, характеристика (11) несет разрыв решения, характеристика (22) — максимум, (33) — середину и (44) — конец правого склона решения. В заштрихованной части плоскости решение тождественно равно нулю. Отсюда, проводя сечения $t=\text{const}$, легко получить графики зависимости ϑ от t в последовательные моменты времени — картинки, из которых можно склеить мультфильм, изображающий развитие рассматриваемого нами процесса во времени. Эти графики показаны на нижних рис. 11, причем точки, отвечающие отмеченным характеристикам, обозначены соответствующими цифрами. Хорошо видно движение «гребня» решения, который в процессе показа фильма как бы приобретает самостоятельную жизнь.

Отметим, что в разобранном примере начальная функция $\vartheta_0(x)$ была разрывной; поэтому характеристика (11) служит для решения $\vartheta(x, t)$ линией разрыва. Характеристики (22) и (44) служат линиями разрыва производных от решения (линиями излома решения). Наличие этих разрывов ничуть не помешало построить решение.

Теперь хорошо видна ошибочность метода построения решения по формулам (4), (5) и т. д., не учитывающего расположения характеристик: это видно уже из расположения области, в которой решение отлично от нуля и которая никак не получается по этому методу.

На линии разрыва решения $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}$ имеет дельтаобразную особенность (это означает, что в зафиксированной точке оси x в соответствующий момент времени $\tilde{t}=\tilde{t}(x)$ будет $\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\sim\delta(t-\tilde{t})$, а поэтому значение ϑ скачком получает приращение), но $\frac{\partial\vartheta}{\partial x}$ имеет аналогичную особенность (т. е. в указанный момент времени зависимость $\vartheta(x)$ имеет в рассматриваемой точке оси x конечный скачок), что находится в соответствии с уравнением (2). Чтобы проследить за этим соответствием более детально, допустим для простоты, что скорость $v\equiv v_0>0$ постоянна, $t_0=0$, а

$$\vartheta_0(x)=e(x)\ \text{(единичной функции)}=\begin{cases}0 & (-\infty<x<0),\\ 1 & (0<x<\infty).\end{cases}$$

Тогда $\varphi(t;\ t_1,\ x_1)=v_0(t-t_1)+x_1$, и потому $\vartheta=e(-v_0t+x)$. Отсюда, поскольку $e'(x)=\delta(x)$, получаем

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=-v_0\delta(-v_0t+x),\qquad \frac{\partial\vartheta}{\partial x}=\delta(-v_0t+x). \tag{12}$$

Уравнение (2), очевидно, удовлетворяется. Линия разрыва имеет уравнение $-v_0t+x=0$, т. е. $x=v_0t$, что непосредственно очевидно. (Подумайте о смысле знака правых частей формул (12)!)

Упражнения

1. Пусть $v \equiv v_0 = \text{const}$, $t_0 = 0$, $\vartheta_0(x) = e^x$. Приняв $t_k = kh$, вычислите $\vartheta(x, t_k)$ по методу Эйлера; в полученной формуле перейдите к пределу при $h \to 0$ и сравните результат с точным решением. Проделайте то же для произвольной функции $\vartheta_0(x)$.
2. Пусть $v = x + t$, $t_0 = 0$, $\vartheta_0(x) = \sin kx$; найдите $\vartheta(x, t)$.

§ 4. Среда с переменным локальным параметром

Перейдем теперь к несколько более сложному случаю, когда рассматриваемый локальный параметр ϑ в процессе движения частиц меняется, эволюционирует, однако частицы, как и раньше, не взаимодействуют друг с другом. Скорость изменения величины ϑ может зависеть от времени, места и достигнутого уровня этой величины, т. е. от t, x и ϑ. (Так как частицы не взаимодействуют, то эта скорость не должна зависеть от $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$.) Пусть эта зависимость известна, т. е. задано уравнение

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g(x, t, \vartheta); \tag{1}$$

в координатах Эйлера то же уравнение имеет вид

$$v(x, t)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g(x, t, \vartheta). \tag{2}$$

Начальное условие, как и раньше, имеет вид (3.3).

После § 3 естественно строить решение полученной начальной задачи в лагранжевых координатах. Для этого в уравнение (1) подставим выражение

$$x = \varphi(t;\, t_0,\, \xi)$$

эйлеровой координаты через лагранжевы (см. § 3). Получим

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g(\varphi(t;\, t_0,\, \xi),\, t,\, \vartheta). \tag{3}$$

В этом дифференциальном уравнении две независимые переменные (ξ, t); но так как производная от искомой функции берется только по t, то переменную ξ можно считать параметром уравнения: если ее зафиксировать, то получится обыкновенное дифференциальное уравнение. Если теперь при любом фиксированном ξ обозначить через $\vartheta(t;\, \xi)$ решение дифференциального уравнения (3) при начальном условии $\vartheta|_{t=t_0} = \vartheta(\xi)$, то мы и получим искомое решение, выраженное в лагранжевых координатах; как и в § 3, это решение можно затем выразить в эйлеровых координатах.

Итак, уравнение с частными производными (2) оказалось возможным свести к более простому, поскольку после перехода к независимым переменным Лагранжа в нем остается производная от