Упражнения

1. Пусть $v \equiv v_0 = \text{const}$, $t_0 = 0$, $\vartheta_0(x) = e^x$. Приняв $t_k = kh$, вычислите $\vartheta(x, t_k)$ по методу Эйлера; в полученной формуле перейдите к пределу при $h \to 0$ и сравните результат с точным решением. Проделайте то же для произвольной функции $\vartheta_0(x)$.
2. Пусть $v = x + t$, $t_0 = 0$, $\vartheta_0(x) = \sin kx$; найдите $\vartheta(x, t)$.

§ 4. Среда с переменным локальным параметром

Перейдем теперь к несколько более сложному случаю, когда рассматриваемый локальный параметр ϑ в процессе движения частиц меняется, эволюционирует, однако частицы, как и раньше, не взаимодействуют друг с другом. Скорость изменения величины ϑ может зависеть от времени, места и достигнутого уровня этой величины, т. е. от t, x и ϑ. (Так как частицы не взаимодействуют, то эта скорость не должна зависеть от $\frac{\partial \vartheta}{\partial x}$.) Пусть эта зависимость известна, т. е. задано уравнение

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g(x, t, \vartheta); \tag{1}$$

в координатах Эйлера то же уравнение имеет вид

$$v(x, t)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g(x, t, \vartheta). \tag{2}$$

Начальное условие, как и раньше, имеет вид (3.3).

После § 3 естественно строить решение полученной начальной задачи в лагранжевых координатах. Для этого в уравнение (1) подставим выражение

$$x = \varphi(t;\ t_0,\ \xi)$$

эйлеровой координаты через лагранжевы (см. § 3). Получим

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g(\varphi(t;\ t_0,\ \xi),\ t,\ \vartheta). \tag{3}$$

В этом дифференциальном уравнении две независимые переменные (ξ, t); но так как производная от искомой функции берется только по t, то переменную ξ можно считать параметром уравнения: если ее зафиксировать, то получится о б ы к н о в е н н о е дифференциальное уравнение. Если теперь при любом фиксированном ξ обозначить через $\vartheta(t;\ \xi)$ решение дифференциального уравнения (3) при начальном условии $\vartheta|_{t=t_0} = \vartheta(\xi)$, то мы и получим искомое решение, выраженное в лагранжевых координатах; как и в § 3, это решение можно затем выразить в эйлеровых координатах.

Итак, уравнение с частными производными (2) оказалось возможным свести к более простому, поскольку после перехода к независимым переменным Лагранжа в нем остается производная от искомой функции только по одной из этих переменных, т. е. (2) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром.

Упражнение

Пусть $v \equiv v_0$, $g(x, t, \vartheta) = a\vartheta + bx + ct$, $t_0 = 0$, $\vartheta_0(\xi) = A \sin \omega\xi$; найдите $\vartheta(x, t)$.

§ 5. Математическое обобщение

Уравнения с частными производными, аналогичные уравнению (4.2), могут встретиться и вне связи с рассмотрением среды из частиц. Поэтому полезно провести независимое математическое рассмотрение таких уравнений. Однако при этом мы будем время от времени вспоминать об истолковании, проведенном в предыдущих параграфах, что даст возможность более наглядно представлять себе свойства решений. Другими словами, всякое уравнение вида (4.2), а также более общего вида, о котором мы будем говорить, можно истолковать так, как если бы это было уравнение эволюции некоторого локального параметра при движении среды из невзаимодействующих друг с другом частиц при заданном поле их скоростей.

Мы будем рассматривать уравнение

$$a(x, t)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + b(x, t)\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g(x, t, \vartheta), \qquad (1)$$

в котором $a(x, t)$ и $b(x, t)$ — заданные функции, а $\vartheta(x, t)$ — искомая функция. Такое уравнение с частными производными 1-го порядка мы будем называть *почти линейным* *) (а если функция g линейно зависит от ϑ, то и уравнение (1) — линейное).

Если бы мы захотели привести уравнение (1) к виду (4.2), то нам пришлось бы поделить обе части (1) на b, в результате чего роль скорости v будет играть отношение a/b. Поэтому *дифференциальное уравнение характеристик* (3.9) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(x, t)}{b(x, t)}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dx}{a(x, t)} = \frac{dt}{b(x, t)}. \qquad (2)$$

Интегральные линии уравнения (2) (линии в плоскости x, t) называются *характеристиками* уравнения (1).

Вдоль каждой своей характеристики уравнение с частными производными (1) *превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение.* В самом деле, пусть $x = \varphi(t)$ — одна из таких характеристик, определенная из уравнения (2). Вдоль такой характеристики иско-

*) Этот термин, впервые примененный И. Г. Петровским, не является общепринятым. Он подчеркивает то обстоятельство, что уравнение (1), вообще говоря, нелинейное, но группа его членов, содержащая производные от искомой функции, имеет такую же структуру, как для линейного уравнения. Более широкий класс составляют квазилинейные уравнения, о которых мы будем говорить в § 17.