искомой функции только по одной из этих переменных, т. е. (2) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение с параметром.

Упражнение

Пусть $v \equiv v_0$, $g(x, t, \vartheta) = a\vartheta + bx + ct$, $t_0 = 0$, $\vartheta_0(\xi) = A \sin \omega\xi$; найдите $\vartheta(x, t)$.

§ 5. Математическое обобщение

Уравнения с частными производными, аналогичные уравнению (4.2), могут встретиться и вне связи с рассмотрением среды из частиц. Поэтому полезно провести независимое математическое рассмотрение таких уравнений. Однако при этом мы будем время от времени вспоминать об истолковании, проведенном в предыдущих параграфах, что даст возможность более наглядно представлять себе свойства решений. Другими словами, всякое уравнение вида (4.2), а также более общего вида, о котором мы будем говорить, можно истолковать так, как если бы это было уравнение эволюции некоторого локального параметра при движении среды из невзаимодействующих друг с другом частиц при заданном поле их скоростей.

Мы будем рассматривать уравнение

$$a(x, t)\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + b(x, t)\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = g(x, t, \vartheta), \tag{1}$$

в котором $a(x, t)$ и $b(x, t)$ — заданные функции, а $\vartheta(x, t)$ — искомая функция. Такое уравнение с частными производными 1-го порядка мы будем называть *почти линейным* *) (а если функция g линейно зависит от ϑ, то и уравнение (1) — линейное).

Если бы мы захотели привести уравнение (1) к виду (4.2), то нам пришлось бы поделить обе части (1) на b, в результате чего роль скорости v будет играть отношение a/b. Поэтому *дифференциальное уравнение характеристик* (3.9) примет вид

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(x, t)}{b(x, t)}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dx}{a(x, t)} = \frac{dt}{b(x, t)}. \tag{2}$$

Интегральные линии уравнения (2) (линии в плоскости x, t) называются *характеристиками* уравнения (1).

Вдоль каждой своей характеристики уравнение с частными производными (1) *превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение.* В самом деле, пусть $x = \varphi(t)$ — одна из таких характеристик, определенная из уравнения (2). Вдоль такой характеристики иско-

*) Этот термин, впервые примененный И. Г. Петровским, не является общепринятым. Он подчеркивает то обстоятельство, что уравнение (1), вообще говоря, нелинейное, но группа его членов, содержащая производные от искомой функции, имеет такую же структуру, как для линейного уравнения. Более широкий класс составляют квазилинейные уравнения, о которых мы будем говорить в § 17.

мое решение $\vartheta(x, t)$ превращается в сложную функцию одного переменного t: $\vartheta = \vartheta(\varphi(t), t)$. Производная от нее равна

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt} + \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{\partial\vartheta}{\partial x}\frac{a}{b} + \frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{1}{b}\left(a\frac{\partial\vartheta}{\partial x} + b\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right); \tag{3}$$

при этом преобразовании мы воспользовались дифференциальным уравнением (2), которому удовлетворяет рассматриваемая характеристика. Правую часть (3) можно преобразовать с помощью уравнения (1), которому должна удовлетворять функция $\vartheta(x, t)$, и мы приходим к равенству

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{1}{b(\varphi(t), t)} g(\varphi(t), t, \vartheta), \tag{4}$$

которое и представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\vartheta(t)$, т. е. относительно значений искомого решения $\vartheta(x, t)$ вдоль характеристики.

Подчеркнем, что рассуждение, проведенное в предыдущем абзаце независимо от § 4, по существу совпадает с переходом от уравнения (4.2) к уравнению (4.3) и потому может быть истолковано как переход к дифференциальному уравнению для рассматриваемого локального параметра вдоль траектории частицы, движущейся со скоростью a/b.

Отметим в заключение, что дифференциальное уравнение характеристик (2) и сами характеристики инвариантно связаны с породившим их уравнением с частными производными (1). Более подробно это означает, что если в уравнении (1) совершить произвольное преобразование независимых переменных $x, t \to x', t'$, а затем для полученного уравнения (1) составить уравнение характеристик и построить сами характеристики, то результат получится такой, как если совершить указанную замену в уравнении исходных характеристик. Другими словами, если рассматривать x', t' как новые (вообще говоря, криволинейные) координаты в плоскости x, t, то семейство характеристик при таком переходе останется инвариантным. В этом утверждении можно убедиться с помощью формальной замены переменных, что мы предоставляем читателю. Но достаточно сослаться и на то, что при описании движения среды с помощью различных координат законы движения частиц, очевидно, должны оставаться в указанном смысле инвариантными.

§ 6. Задача Коши и краевая задача

Мы показали, что уравнение (5.1), переписанное вдоль характеристики, превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка (5.4). Но решение обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка однозначно определяется, если задать начальное условие, т. е. значение искомой функции при некотором значении независимой переменной (см., например, ЭПМ, § VII.1).