мое решение $\vartheta(x, t)$ превращается в сложную функцию одного переменного t: $\vartheta=\vartheta(\varphi(t), t)$. Производная от нее равна

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\frac{a}{b}+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=\frac{1}{b}\left(a\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+b\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right); \qquad (3)$$

при этом преобразовании мы воспользовались дифференциальным уравнением (2), которому удовлетворяет рассматриваемая характеристика. Правую часть (3) можно преобразовать с помощью уравнения (1), которому должна удовлетворять функция $\vartheta(x, t)$, и мы приходим к равенству

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{1}{b(\varphi(t), t)}g(\varphi(t), t, \vartheta), \qquad (4)$$

которое и представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение относительно функции $\vartheta(t)$, т. е. относительно значений искомого решения $\vartheta(x, t)$ вдоль характеристики.

Подчеркнем, что рассуждение, проведенное в предыдущем абзаце независимо от § 4, по существу совпадает с переходом от уравнения (4.2) к уравнению (4.3) и потому может быть истолковано как переход к дифференциальному уравнению для рассматриваемого локального параметра вдоль траектории частицы, движущейся со скоростью a/b.

Отметим в заключение, что дифференциальное уравнение характеристик (2) и сами характеристики инвариантно связаны с породившим их уравнением с частными производными (1). Более подробно это означает, что если в уравнении (1) совершить произвольное преобразование независимых переменных $x, t \to x', t'$, а затем для полученного уравнения (1) составить уравнение характеристик и построить сами характеристики, то результат получится такой, как если совершить указанную замену в уравнении исходных характеристик. Другими словами, если рассматривать x', t' как новые (вообще говоря, криволинейные) координаты в плоскости x, t, то семейство характеристик при таком переходе останется инвариантным. В этом утверждении можно убедиться с помощью формальной замены переменных, что мы предоставляем читателю. Но достаточно сослаться и на то, что при описании движения среды с помощью различных координат законы движения частиц, очевидно, должны оставаться в указанном смысле инвариантными.

§ 6. Задача Коши и краевая задача

Мы показали, что уравнение (5.1), переписанное вдоль характеристики, превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение 1-го порядка (5.4). Но решение обыкновенного дифференциального уравнения 1-го порядка однозначно определяется, если задать начальное условие, т. е. значение искомой функции при некотором значении независимой переменной (см., например, ЭПМ, § VII.1).

Таким образом, *задание значения решения* $\vartheta(x, t)$ *уравнения* (5.1) *в некоторой точке плоскости* x, t *однозначно определяет значения этого решения во всех точках характеристики, проходящей через эту точку.* Этот факт является непосредственным обобщением утверждения, вытекающего из рассмотрений §§ 3—4, согласно которому знание локального свойства среды из невзаимодействующих частиц в непосредственной близости какой-либо частицы в некоторый момент времени однозначно определяет это свойство на протяжении всего дальнейшего движения этой частицы.

Начнем с рассмотрения уравнения

$$a(x, t)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+b(x, t)\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=0. \qquad (1)$$

В этом случае уравнение (5.4) приобретает вид $d\vartheta/dt=0$, т. е. решение ϑ постоянно вдоль каждой характеристики. (Это математическое обобщение результатов § 3, в котором локальный параметр среды оставался неизменным для каждой частицы при эволюции среды.) Другими словами, семейство характеристик уравнения (1) одновременно служит семейством линий уровня *любого* его решения $\vartheta(x, t)$; однако изменение ϑ при переходе от одной характеристики к другой будет, вообще говоря, для различных решений различным.

Чтобы однозначно получить решение уравнения (1) в некоторой *области* плоскости x, t, недостаточно задать значение этого решения в одной точке плоскости x, t, а надо задать эти значения *во всех точках некоторой линии* плоскости x, t; на рис. 12 эта линия обозначена буквой $(\mathscr{L})$. Если через любую точку M линии $(\mathscr{L})$ провести в плоскости x, t характеристику (m), то знание значения $\vartheta(M)$ однозначно определит значение $\vartheta=\vartheta(M)$ вдоль всей (m), т. е. в пространстве x, t, ϑ получится линия (m'), расположенная на постоянной высоте и проектирующаяся на (m). Если теперь точка M пробежит всю линию $(\mathscr{L})$, то линия (m') опишет поверхность (рис. 12), которая и будет служить графиком решения уравнения (1) при заданных значениях этого решения на $(\mathscr{L})$.

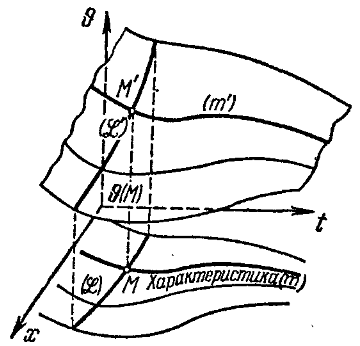

Рис. 12.

Другими словами, каждую характеристику надо поднять (точнее, перенести параллельно оси ϑ) настолько, чтобы она пересекла линию $(\mathscr{L}')$, определенную заданными значениями ϑ на $(\mathscr{L})$ (рис. 12); все эти характеристики вместе и заполнят поверхность, изображающую искомое решение $\vartheta(x, t)$.

На рис. 13 изображена возможная картина зависимости $\vartheta(x)$ в последовательные моменты $t=t_1$, t_2, t_3. Соответствующие графики получаются в результате пересечения поверхности, изображающей решение $\vartheta(x,t)$, плоскостями $t=\mathrm{const}$. Точки A_1, A_2, A_3 на рис. 13 отвечают одной и той же «частице»; более точно, точки плоскости x, t с координатами $(x_1;\ t_1)$, $(x_2;\ t_2)$, $(x_3;\ t_3)$ принадлежат одной и той же характеристике (ср. с рис. 11).

Если теперь перейти к общему уравнению (5.1), то разница будет только в том, что линия (m'), проектирующаяся на характеристику (m), уже не будет расположена на постоянной высоте, а будет изображать решение обыкновенного дифференциального уравнения (5.4), принимающее данное начальное значение ϑ (M). В остальном наглядный смысл построения поверхности, изображающей решение, не изменится. Из этого построения, в частности, видно, что особенности—изломы и разрывы у заданной функции ϑ (M)—распространяются вдоль характеристик, порождая соответствующие особенности у решения. В отличие от этого, точки максимума и минимума для $\vartheta|_{t=\mathrm{const}}$ в общем случае уже, вообще говоря, не принадлежат единой характеристике, как это было в случае $g\equiv 0$.

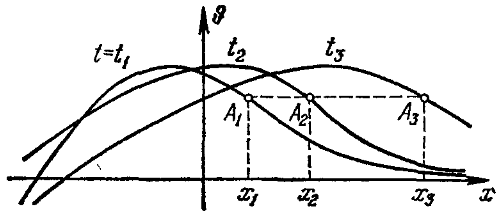

Рис. 13.

Покажем, как провести описанную процедуру построения решения аналитически. Для этого, аналогично п. 3, обозначим через $x=\varphi(t;\ t_1,\ x_1)$ решение дифференциального уравнения (5.2) при начальном условии $x(t_1)=x_1$. Обозначим, далее, через $\vartheta=\psi(t;\ t_1,\ x_1,\ \vartheta_1)$ решение уравнения (5.4) при начальном условии $\vartheta(t_1)=\vartheta_1$, если в правую часть (5.4) вместо $\varphi(t)$ подставлено $\varphi(t;\ t_1,\ x_1)$. Допустим, что нам дано уравнение линии $(\mathscr{L})$ в параметрической форме

$$(\mathscr{L}):\ t=\alpha(p),\ x=\beta(p) \tag{2}$$

(p — параметр), а в точках этой линии заданы значения искомого решения как функция того же параметра:

$$\vartheta=\gamma(p). \tag{3}$$

Тогда при каждом значении параметра p через соответствующую этому значению точку линии $(\mathscr{L})$ проходит характеристика с уравнением

$$x=\varphi(t;\ \alpha(p),\ \beta(p)), \tag{4}$$

а значение решения вдоль этой характеристики изменяется по закону

$$\vartheta=\psi(t;\ \alpha(p),\ \beta(p),\ \gamma(p)). \tag{5}$$

Теперь достаточно из уравнений (4) и (5) исключить p (например, из (4) выразить p через t и x и подставить это выражение в правую часть (5)), чтобы получить искомое решение. Если такое исключение не удастся, то равенства (4) и (5) совместно можно рассматривать как параметрическую форму задания этого решения.

Итак, для построения решений уравнения (5.1) надо уметь интегрировать два обыкновенных дифференциальных уравнения 1-го порядка: дифференциальное уравнение (5.2) характеристик и уравнение (5.4), в которое переходит заданное уравнение (5.1) вдоль любой характеристики.

Рассмотрим пример. Пусть надо найти решение уравнения

$$x\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+2t\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=3x^2\vartheta,$$

если дополнительно дано, что при $t=1$ должно быть $\vartheta=5x^2$. Для решения напишем дифференциальное уравнение характеристик

$$\frac{dx}{x}=\frac{dt}{2t}.$$

Отсюда $x=C\sqrt{t}$ и при начальном условии $x(t_1)=x_1$ получаем

$$x=\varphi(t;\ t_1,\ x_1)=x_1\sqrt{\frac{t}{t_1}}. \tag{6}$$

Уравнение (5.4) здесь приобретает вид

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\frac{1}{2t}\cdot 3\left(x_1\sqrt{\frac{t}{t_1}}\right)^2\vartheta=\frac{3x_1^2}{2t_1}\vartheta$$

и при начальном условии $\vartheta(t_1)=\vartheta_1$ имеет решение

$$\vartheta=\psi(t;\ t_1,\ x_1,\ \vartheta_1)=\vartheta_1\exp\left[\frac{3x_1^2}{2t_1}(t-t_1)\right]. \tag{7}$$

Линией $(\mathscr{L})$ в плоскости t, x здесь служит прямая $t=1$, вдоль которой за параметр можно взять сам x. Таким образом, параметрические уравнения линии $(\mathscr{L})$ и заданных на ней значений решения имеют вид

$$t=1,\quad x=p,\quad \vartheta=5p^2.$$

При фиксированном p уравнение характеристики (6) и закон изменения решения (7) вдоль нее принимают вид

$$x=p\sqrt{t},\qquad \vartheta=5p^2\exp\left[\frac{3}{2}p^2(t-1)\right].$$

Исключая отсюда p, получаем искомое решение

$$\vartheta=5\frac{x^2}{t}\exp\frac{3x^2(t-1)}{2t}.$$

Вернемся к общему случаю. Какой может быть линия ($\mathscr{L}$), несущая заданные значения искомого решения? Из предыдущего ясно, что это не может быть характеристика: в качестве носителя начальных данных вся она эквивалентна любой своей точке. Можно сказать больше: никакая характеристика не должна иметь с ($\mathscr{L}$) более одной общей точки. В самом деле, пусть характеристики и линия ($\mathscr{L}$) расположены, как на рис. 14. Тогда задание решения в точке A однозначно определит его вдоль всей характеристики, проходящей через A, т. е., в частности, и в точке A_1; значит, в точке A_1 решение уже нельзя задавать, а потому такая линия ($\mathscr{L}$) не годится.

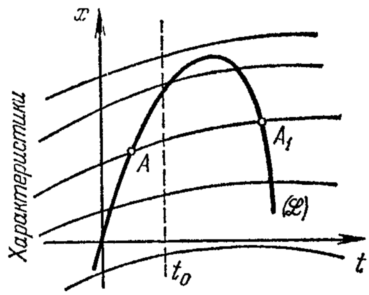

Рис. 14.

Чаще всего искомое решение задается при некотором $t=t_0$, а строится при $t>t_0$. Тогда говорят, что задано *начальное условие*, а задачу о решении дифференциального уравнения при дополнительно заданном начальном условии называют *задачей с начальным условием* или *задачей Коши*. Линией ($\mathscr{L}$), несущей начальные данные, здесь служит прямая, изображенная на рис. 14 пунктиром. Если в уравнении (5.1) коэффициент $b>0$, как мы будем предполагать впредь, то из уравнения (5.2) видно, что характеристики имеют уравнение вида $x=x(t)$, т. е. никакая характеристика не может пересечь линию ($\mathscr{L}$) дважды, а потому задача Коши всегда разрешима. О физическом смысле такого решения мы уже говорили в §§ 3—4.

Иногда искомое решение задается при некотором $x=x_0$ на каком-либо интервале времени (например, для всех t), а строится при $x>x_0$ или при $x<x_0$. Тогда говорят, что задано *граничное* или *краевое условие*, а соответствующая задача называется *граничной* или *краевой*. Физически это означает, что мы наблюдаем за потоком, сидя на берегу, а затем по результатам наблюдения хотим восстановить эволюцию всего потока. В этом случае линией ($\mathscr{L}$) будет служить прямая, параллельная оси t, и для того, чтобы на ($\mathscr{L}$) можно было граничное условие задавать произвольно, все характеристики должны с ростом t пересекать ($\mathscr{L}$) в одну и ту же сторону, т. е. функция $a(t, x_0)$ должна сохранять знак. (Подумайте о физическом смысле этого условия.)

Линия ($\mathscr{L}$) может иметь вид, показанный на рис. 15, причем решение ищется в заштрихованной области. Это означает, что ставится как начальное, так и граничное условия; соответствующая задача о разыскании решения называется *смешанной*. Она обычно возникает, если рассматривается полубесконечная среда, $x_0 \leqslant x < \infty$; при этом точка x_0 играет роль крана, через который жидкость поступает в поток. Тогда при заданном поле скоростей для определения закона эволюции локальных свойств потока надо знать не только его начальное состояние (начальное условие), но и свойства поступающей жидкости, когда она проходит через кран, т. е. при $x=x_0$, $t_0\leqslant t<\infty$ (граничное условие). Впрочем, если течение изучается только на промежутке времени от t_0 до некоторого $T>t_0$, то и граничное условие надо задавать лишь при $t_0\leqslant t\leqslant T$.

Совсем иная картина получится, если через кран $x=x_0$ жидкость удаляется из рассматриваемой области $x_0\leqslant x<\infty$ (как тогда расположены характеристики на рис. 15?). Ясно, что если частицы не взаимодействуют, то состояние каждой частицы в момент выхода ее через кран не может повлиять на дальнейшее состояние среды в данной области. Таким образом, в этом случае краевое условие отпадает и остается только начальное. Это ясно также из того, что в данном случае, в отличие от предыдущего, новых частиц в область $x_0\leqslant x<\infty$ с течением времени не поступает, поэтому начальное распределение изучаемого локального параметра ϑ и закон движения частиц полностью определяют дальнейшую эволюцию этого распределения. В частности, теперь и значение ϑ при $x=x_0$, $t_0\leqslant t<\infty$, т. е. на выходе из области, полностью предопределено начальным условием, это значение приносят частицы, приходящие из области, а поэтому оно и не может быть задано: если мы попытаемся задать $\vartheta|_{x=x_0}$ не таким, каким оно приносится, то немедленно придем к противоречию, а если таким же, то это задание будет излишним. (Продумайте все эти утверждения, исходя из геометрической картины характеристик в плоскости x, t!)

Конечно, заключения о том, что в первом варианте краевое условие необходимо, а во втором оно излишне, неразрывно связаны с тем, что мы осуществляли построение зависимости $\vartheta(x, t)$ в п е р е д во времени, т. е. как бы предсказывали будущее. Если бы мы ставили задачу об определении прошлого, т. е. строили решение при $t<t_0$, то картина получилась бы обратной, так как тогда краевое условие потребовалось бы только во втором варианте (почему?). Таким образом, в данной задаче необходимость задания краевого условия связана с выбором направления времени.

Если на рис. 15 задано только начальное условие при $x_0\leqslant x<\infty$, то решение однозначно определится только выше характеристики, проходящей через точку $(t_0; x_0)$; на рис. 15 она обозначена буквой (l). В общем случае, если для уравнения (5.1) искомое решение задано на некоторой дуге $(\mathscr{L})$, то это решение однозначно определяется в области, ограниченной характеристиками, проведенными через концы $(\mathscr{L})$. Эта область, заштрихованная на рис. 16, называется *областью определенности* или *областью влияния*. (Последнее означает, что изменение значений, заданных на $(\mathscr{L})$, сказывается только на значениях искомого решения в заштрихованной области, но не вне ее.)

В заключение еще одно замечание. Мы до сих пор считали, что независимые переменные t, x имеют вполне определенный физический смысл: t — время, а x — геометрическая координата. Однако при построении решения это не было по существу использовано, так что независимые переменные в уравнении вида (5.1) могут иметь

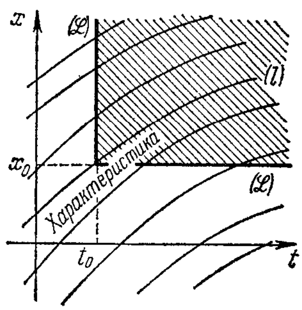

Рис. 15.

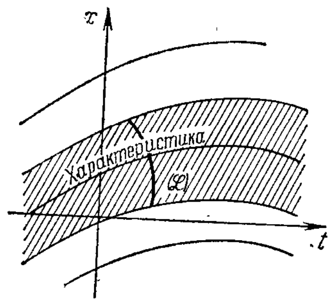

Рис. 16.

любой физический смысл и могут обозначаться любыми буквами: например, обе эти переменные могут быть геометрическими координатами. В этом случае не всегда оказывается возможным считать вдоль характеристики одну из переменных функций другой, т. е. считать $x=\varphi(t)$. Тогда дифференциальное уравнение характеристик (5.2) можно переписать в виде

$$\frac{dx}{a(x,\ t)}=\frac{dt}{b(x,\ t)}=dq, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dx}{dq}=a(x,\ t), \quad \frac{dt}{dq}=b(x,\ t), \tag{8}$$

где q — некоторый параметр, отсчитываемый вдоль характеристик. Решая последнюю систему уравнений при начальных данных $x|_{q=0}=x_1$, $t|_{q=0}=t_1$, получим выражения вида

$$x=\varphi_1(q;\ t_1,\ x_1),\quad t=\varphi_2(q;\ t_1,\ x_1). \tag{9}$$

Уравнение (5.1) вдоль характеристики принимает вид

$$\frac{d\vartheta}{dq}=g(\varphi_1(q;\ t_1,\ x_1),\ \varphi_2(q;\ t_1,\ x_1),\vartheta)$$

и при начальном условии $\vartheta|_{q=0}=\vartheta_1$ имеет решение вида

$$\vartheta=\psi(q;\ t_1,\ x_1,\ \vartheta_1). \tag{10}$$

Построение решения, значения которого заданы на некоторой линии $(\mathscr{L})$ плоскости x, t, проходит аналогично тому, как было описано выше, однако теперь придется исключать из трех равенств два параметра p и q.

Упражнения

1. Найдите решение уравнения $x\vartheta'_x - 2t\vartheta'_t = 0$ ($t \geqslant 1$) при начальном условии $\vartheta|_{t=1} = 3x$.

2. Пусть уравнение линии ($\mathscr{L}$) задано в виде $F(x, t) = 0$, а значение искомого решения на ней — в виде $\vartheta = \Phi(x, t)$. Опишите в условиях последнего абзаца § 6 процедуру для построения этого решения.

3. Пусть решение уравнения $x\vartheta'_x + t\vartheta'_t = g(x, t, \vartheta)$ задается на некоторой дуге линии с уравнением $t = 1 + x^2$. Для каких дуг это задание произвольно? Каковы соответствующие области влияния?

4. Найдите решение уравнения $x\vartheta'_x + t\vartheta'_t = 0$, которое на дуге ($L$): $t = 1 + x^2$ ($1 \leqslant x < \infty$) принимает значение $\vartheta = 1$. Объясните поведение решения на границе области влияния.

§ 7. Отыскание плотности среды

Важнейшим локальным параметром потока является его плотность. В § I.7 мы показали, что если в процессе эволюции среды масса каждой ее порции сохраняется, то плотность и скорость потока связаны уравнением неразрывности

$$(\rho v)'_x + \rho'_t = 0. \qquad (1) = (I.7.3)$$

Предположим, в соответствии с установкой этой главы, что поле скоростей $v(x, t)$ задано, и допустим также, что известно распределение плотностей в начальный момент времени

$$\rho|_{t=t_0} = \rho_0(x). \qquad (2)$$

Как найти поле плотностей $\rho(x, t)$ в любой момент времени?

Если раскрыть в уравнении (1) скобки и переписать его в виде

$$v(x, t)\rho'_x + \rho'_t = -v'_x(x, t)\rho, \qquad (3)$$

то ясно, что оно является частным случаем общего уравнения (4.2); этого следовало ожидать, так как плотность порций среды в процессе ее эволюции, вообще говоря, меняется. Для решения этого уравнения при начальном условии (2), согласно общей методике, надо перейти к лагранжевым координатам, другими словами, рассмотреть уравнение (3) вдоль его характеристик — графиков движения частиц в потоке. Это даст

$$\frac{d\rho}{dt} = -v'_x(\varphi(t; t_0, \xi), t)\rho \qquad (4)$$

(смысл функции φ см. в § 3). В полученном, уже обыкновенном дифференциальном уравнении, которое надо рассматривать при $\xi = \mathrm{const}$, разделяются переменные, и мы получаем, с учетом начального условия (2)

$$\frac{d\rho}{\rho} = -v'_x\,dt, \quad \ln\rho - \ln\rho_0 = -\int_{t_0}^{t} v'_x\,d\tau,$$