Упражнения

1. Найдите решение уравнения $x\vartheta'_x-2t\vartheta'_t=0$ ($t\geqslant 1$) при начальном условии $\vartheta|_{t=1}=3x$.

2. Пусть уравнение линии ($\mathscr{L}$) задано в виде $F(x, t)=0$, а значение искомого решения на ней — в виде $\vartheta=\Phi(x, t)$. Опишите в условиях последнего абзаца § 6 процедуру для построения этого решения.

3. Пусть решение уравнения $x\vartheta'_x+t\vartheta'_t=g(x, t, \vartheta)$ задается на некоторой дуге линии с уравнением $t=1+x^2$. Для каких дуг это задание произвольно? Каковы соответствующие области влияния?

4. Найдите решение уравнения $x\vartheta'_x+t\vartheta'_t=0$, которое на дуге ($L$): $t=1+x^2$ ($1\leqslant x<\infty$) принимает значение $\vartheta=1$. Объясните поведение решения на границе области влияния.

§ 7. Отыскание плотности среды

Важнейшим локальным параметром потока является его плотность. В § I.7 мы показали, что если в процессе эволюции среды масса каждой ее порции сохраняется, то плотность и скорость потока связаны уравнением неразрывности

$$(\rho v)'_x+\rho'_t=0. \qquad (1)=(I.7.3)$$

Предположим, в соответствии с установкой этой главы, что поле скоростей $v(x, t)$ задано, и допустим также, что известно распределение плотностей в начальный момент времени

$$\rho|_{t=t_0}=\rho_0(x). \qquad (2)$$

Как найти поле плотностей $\rho(x, t)$ в любой момент времени?

Если раскрыть в уравнении (1) скобки и переписать его в виде

$$v(x, t)\rho'_x+\rho'_t=-v'_x(x,t)\rho, \qquad (3)$$

то ясно, что оно является частным случаем общего уравнения (4.2); этого следовало ожидать, так как плотность порций среды в процессе ее эволюции, вообще говоря, меняется. Для решения этого уравнения при начальном условии (2), согласно общей методике, надо перейти к лагранжевым координатам, другими словами, рассмотреть уравнение (3) вдоль его характеристик — графиков движения частиц в потоке. Это даст

$$\frac{d\rho}{dt}=-v'_x(\varphi(t;\ t_0,\ \xi),\ t)\rho \qquad (4)$$

(смысл функции φ см. в § 3). В полученном, уже обыкновенном дифференциальном уравнении, которое надо рассматривать при $\xi=\text{const}$, разделяются переменные, и мы получаем, с учетом начального условия (2)

$$\frac{d\rho}{\rho}=-v'_x\,dt, \quad \ln\rho-\ln\rho_0=-\int_{t_0}^{t} v'_x\,d\tau,$$

откуда окончательно

$$\rho=\rho_0(\xi)\exp\left[-\int_{t_0}^{t} v'_x(\varphi(\tau;\ t_0,\ \xi),\ \tau)\,d\tau\right]. \tag{5}$$

Ответ можно выразить и в эйлеровых координатах, подставив $\xi=\varphi(t_0;\ t,\ x)$ и заметив, что $\varphi(\tau;\ t_0,\ \varphi(t_0;\ t,\ x))\equiv\varphi(\tau;\ t,\ x)$ (почему?). Получим

$$\rho=\rho_0(\varphi(t_0;\ t,\ x))\exp\left[-\int_{t_0}^{t} v'_x(\varphi(\tau;\ t,\ x),\ \tau)\,d\tau\right]. \tag{6}$$

Это решение можно было написать сразу, если заметить, что

$$\exp\left[-\int_{t_0}^{t} v'_x(\varphi(\tau;\ t,\ x),\ \tau)\,d\tau\right]=\frac{\partial\xi}{\partial x}=\varphi'_x(t_0;\ t,\ x) \tag{7}$$

(см. упражнение I.3.7, где применены несколько иные, но эквивалентные обозначения). Таким образом, взамен (5) можно написать

$$\rho=\rho_0(\xi)\frac{\partial\xi}{\partial x}\left(=\rho_0(\xi)\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}=\rho_0(\xi)\left[\varphi'_\xi(t;\ t_0,\ \xi)\right]^{-1}\right). \tag{8}$$

Однако это ясно: в процессе эволюции малая порция среды растягивается в $\frac{\partial x}{\partial\xi}$ раз (рис. 17), а потому плотность умножается на $\frac{\partial\xi}{\partial x}$.

Покажем, как изменится форма решения, если скорость среды задана в лагранжевых координатах, $v=v(\xi,\ t)$. Так как закон движения частицы имеет вид $x=\xi+\int_{t_0}^{t} v(\xi,\ \tau)\ d\tau$, то

$$\frac{\partial x}{\partial\xi}=1+\int_{t_0}^{t} v'_\xi(\xi,\ \tau)\,d\tau.$$

Поэтому формула (8) дает

$$\rho=\rho_0(\xi)\left[1+\int_{t_0}^{t} v'_\xi(\xi,\ \tau)\,d\tau\right]^{-1}. \tag{9}$$

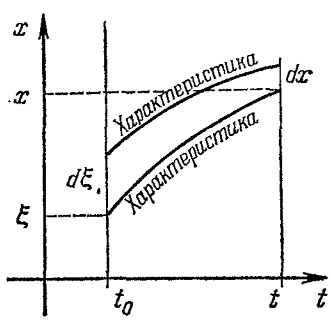

Рис. 17.

Рассмотрим несколько частных случаев.

1. В самом простом случае, когда заданное поле скоростей однородное, т. е. $v=v(t)$, будет

$$x=\xi+\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau,\quad\text{т. е.}\quad \xi=x-\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau,$$

а потому решение (8) приобретает вид

$$\rho=\rho_0(\xi)=\rho_0\left(x-\int_{t_0}^{t} v(\tau)\,d\tau\right).$$

Впрочем, это решение ясно и непосредственно: для однородного поля скоростей расстояние между частицами остается неизменным, поэтому плотность среды в точке x в момент t равна плотности в момент t_0 в точке ξ, пришедшей во время t в x.

В частности, если дополнительно дано, что среда в начальном состоянии была однородной, т. е. $\rho_0(\xi)\equiv\rho_0=\text{const}$, то и $\rho(x,\ t)\equiv\rho_0$ — среда остается однородной, ее плотность не меняется.

2. Допустим теперь, что среда в начальном состоянии была однородной, но поле скоростей неоднородное. Тогда из (8) получаем, что

$$\rho=\rho_0\frac{\partial\xi}{\partial x}=\rho_0\varphi_x'(t_0;\ t,\ x).$$

В процессе эволюции среда, вообще говоря, перестает быть однородной: в зоне сближения частиц плотность возрастает, а в зоне их взаимного удаления плотность уменьшается.

3. Рассмотрим задачу о перемещении единичной массы, первоначально сосредоточенной на бесконечно малом интервале в точке ξ_0. Для этого надо положить $\rho_0(\xi)=\delta(\xi-\xi_0)$, где δ — дельта-функция. Так как плотность ρ линейно зависит от ее начального значения $\rho_0(\xi)$, то решение G в указанном частном случае будет служить функцией влияния (см. § 2) общей задачи о построении плотности по ее начальному распределению.

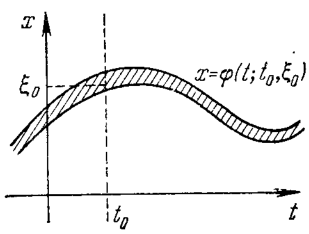

Рис. 18.

Решение можно записать в различных формах. Так, в силу формул (8) и (9) получаем решение в лагранжевых координатах *):

$$G=\delta(\xi-\xi_0)\left(\frac{\partial x}{\partial\xi}\right)^{-1}_{\xi=\xi_0}=$$
$$=\delta(\xi-\xi_0)\left[1+\int_{t_0}^{t}\left.\frac{\partial v}{\partial\xi}\right|_{\xi=\xi_0}dt\right]^{-1}.$$

Чтобы получить решение в эйлеровых координатах, заметим, что в процессе эволюции масса остается единичной и сосредоточенной на бесконечно малом интервале, но уже расположенном в точке $\varphi(t;\ t_0,\ \xi_0)$; таким образом,

$$G=\delta(x-\varphi(t;\ t_0,\ \xi_0)). \tag{10}$$

*) См. замечание по поводу применения лагранжевых координат, сделанное в § 1.5.

Правая часть отлична от нуля лишь в бесконечно узкой полоске, заштрихованной на рис. 18 и ограниченной двумя соседними характеристиками, т. е. интегральными кривыми уравнения (3.9), причем интеграл от этой функции по любой прямой, параллельной оси x, равен 1. Справедлива также формула, вытекающая из (6) и (7):

$$G=\delta(\varphi(t_0;\ t,\ x)-\xi_0)\varphi'_x(t_0;\ t,\ x). \qquad (11)$$

Важный частный случай стационарного поля скоростей мы рассмотрим в § 8.

Упражнения

1. Обобщите решение (6) на случай потока с добавляемой массой (§ I.7).
2. Выведите (11) из (10) формально, опираясь на свойства дельта-функции.

§ 8. Стационарное поле скоростей

Пусть заданное поле скоростей стационарное, т. е. $v=v(x)$. Мы уже упоминали в § I.7, что если и поле плотностей стационарное, т. е. $\rho=\rho(x)$, то эти две функции связаны простым соотношением

$$\rho(x)\cdot v(x)=\mathrm{const}, \quad \text{т. е.} \quad \rho(x)=\frac{c}{v(x)}; \qquad (1)$$

это вытекает как непосредственно из закона сохранения масс, так и формально из уравнения неразрывности (7.1).

Из формулы (1) видно, что стационарное решение невозможно, если функция $v(x)$ меняет знак, т. е. если поле скоростей в разных точках оси x может иметь различное направление. Так будет, если в среде имеются устойчивые или неустойчивые точки покоя, по обе стороны от которых поле скоростей направлено к этой точке или соответственно от нее.

Для общего — вообще говоря, нестационарного — поля плотностей (но, как и раньше, стационарного в эйлеровых координатах поля скоростей!), как оказывается, имеет место соотношение вида (1) в лагранжевых координатах! Чтобы проверить это, умножим обе части уравнения неразрывности (7.1) на $v(x)$; так как v не зависит от t, то полученное равенство можно переписать в виде $v(\rho v)'_x+(\rho v)'_t=0$. Если теперь перейти к координатам Лагранжа и вспомнить выражение (I.3.5) для производной по времени в лагранжевых переменных, то последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{d(\rho v)}{dt}=0.$$

Значит, хотя ρ и v в отдельности зависят не только от ξ, но и от t, поток массы ρv может зависеть только от ξ, т. е. для каждой малой порции частиц в процессе ее эволюции этот поток остается неизменным.