

Правая часть отлична от нуля лишь в бесконечно узкой полоске, заштрихованной на рис. 18 и ограниченной двумя соседними характеристиками, т. е. интегральными кривыми уравнения (3.9), причем интеграл от этой функции по любой прямой, параллельной оси  $x$ , равен 1. Справедлива также формула, вытекающая из (6) и (7):

$$G = \delta(\varphi(t_0; t, x) - \xi_0)\varphi'_x(t_0; t, x). \quad (11)$$

Важный частный случай стационарного поля скоростей мы рассмотрим в § 8.

#### Упражнения

1. Обобщите решение (6) на случай потока с добавляемой массой (§ 1.7).
2. Выведите (11) из (10) формально, опираясь на свойства дельта-функции.

### § 8. Стационарное поле скоростей

Пусть заданное поле скоростей стационарное, т. е.  $v = v(x)$ . Мы уже упоминали в § 1.7, что если и поле плотностей стационарное, т. е.  $\rho = \rho(x)$ , то эти две функции связаны простым соотношением

$$\rho(x) \cdot v(x) = \text{const}, \quad \text{т. е.} \quad \rho(x) = \frac{c}{v(x)}; \quad (1)$$

это вытекает как непосредственно из закона сохранения масс, так и формально из уравнения неразрывности (7.1).

Из формулы (1) видно, что стационарное решение невозможно, если функция  $v(x)$  меняет знак, т. е. если поле скоростей в разных точках оси  $x$  может иметь различное направление. Так будет, если в среде имеются устойчивые или неустойчивые точки покоя, по обе стороны от которых поле скоростей направлено к этой точке или соответственно от нее.

Для общего — вообще говоря, нестационарного — поля плотностей (но, как и раньше, стационарного в эйлеровых координатах поля скоростей!), как оказывается, имеет место соотношение вида (1) в л а г р а н ж е в ы х координатах! Чтобы проверить это, умножим обе части уравнения неразрывности (7.1) на  $v(x)$ ; так как  $v$  не зависит от  $t$ , то полученное равенство можно переписать в виде  $v(\rho v)'_x + (\rho v)'_t = 0$ . Если теперь перейти к координатам Лагранжа и вспомнить выражение (1.3.5) для производной по времени в лагранжевых переменных, то последнее соотношение можно переписать в виде

$$\frac{d(\rho v)}{dt} = 0.$$

Значит, хотя  $\rho$  и  $v$  в отдельности зависят не только от  $\xi$ , но и от  $t$ , поток массы  $\rho v$  может зависеть только от  $\xi$ , т. е. для каждой малой порции частиц в процессе ее эволюции этот поток остается неизменным.

Это свойство легко уяснить, рассматривая соответствующее семейство характеристик. В самом деле, в § 2 мы уже отмечали, что для стационарного поля скоростей это семейство инвариантно относительно переноса вдоль оси  $t$ . Рассмотрим (рис. 19) две характеристики, полученные одна из другой переносом на малый промежуток времени  $\tau$ . Так как масса среды на интервале, ограниченном двумя характеристиками, не зависит от времени (почему?), то, с точностью до малых высшего порядка (см. рис. 19),

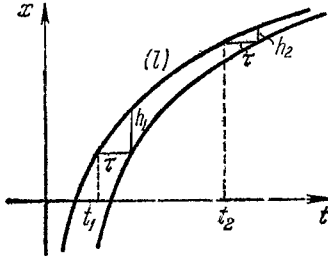


Рис. 19.

$$\rho_1 h_1 = \rho_2 h_2, \text{ откуда } \frac{\rho_1}{\rho_2} = \frac{h_2}{h_1} = \frac{h_2/\tau}{h_1/\tau} = \frac{(dx/dt)_2}{(dx/dt)_1} = \frac{v_2}{v_1},$$

т. е.  $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$ , и в силу произвольности  $t_1$  и  $t_2$  получается требуемое свойство.

С помощью доказанного свойства легко решить задачу о построении поля плотностей, удовлетворяющего заданному начальному распределению (7.2). В самом деле, в силу сказанного будет  $\rho(x, t)v(x) = \rho_0(\xi)v(\xi)$ , откуда

$$\rho(x, t) = \frac{v(\xi)}{v(x)} \rho_0(\xi) = \frac{v(\varphi(t_0; t, x))}{v(x)} \rho_0(\varphi(t_0; t, x)). \quad (2)$$

Для стационарного поля скоростей уравнение характеристик нетрудно выразить в квадратурах, так как в дифференциальном уравнении (3.9) для характеристик разделяются переменные:

$\frac{dx}{dt} = v(x)$ ,  $\frac{dx}{v(x)} = dt$ , откуда, обозначив  $\int \frac{dx}{v(x)} = w(x)$  (точнее,  $w(x)$  есть какая-либо одна из первообразных функций от  $\frac{1}{v(x)}$ ), получим

$$w(x) - w(\xi) = t - t_0, \quad \xi = \zeta(w(x) - t + t_0), \quad (3)$$

где под  $\zeta$  понимается обратная функция к  $w(x)$ . Последнее выражение для  $\xi$  можно подставить в формулу (2).

Проследим за асимптотическим поведением решения при  $t \rightarrow \infty$ , приняв сначала для простоты, что среда на всей оси движется в одну и ту же сторону, например  $v(x) > 0$  ( $-\infty < x < \infty$ ), а при  $x \rightarrow -\infty$  (т. е. в направлении, откуда приходят частицы) среда однородна:  $\rho_0(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \rho_0$ ,  $v(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} v_0$ . Так как при любом фиксированном  $x$  будет  $\xi \xrightarrow{t \rightarrow \infty} -\infty$  (почему?), то из (2) получаем

$$\rho(x, t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{v_0}{v(x)} \rho_0.$$

Таким образом, здесь происходит процесс установления, т. е. поток в пределе переходит в стационарный, для которого распределе-

ние плотности не зависит от ее распределения в начальный момент времени, а определяется только полем скоростей и значением плотности при  $x = -\infty$ .

Полезно заметить, что этот процесс установления не обладает свойством равномерности, т. е. не надо думать, что когда пройдет много времени, то распределение плотности будет сразу на всей оси  $x$  близким к предельному. Это особенно хорошо видно, если  $v(x) \equiv v_0 = \text{const}$ , а потому  $\rho(x, t) = \rho_0(x - v_0 t)$ . В этом случае линиями уровня функции  $\rho(x, t)$  в плоскости  $x, t$  служат линии  $x - v_0 t = \text{const}$ , т. е. характеристики. На рис. 20, б показан пример графиков плотности в последовательные моменты времени  $t_0 < t_1 < t_2 < \dots$ , а на рис. 20, а — соответствующее семейство характеристик, причем жирно обозначена характеристика, отвечающая максимальному значению плотности. С ростом  $t$  отклонения  $\rho$  от предельного значения  $\rho_0$  сносятся в сторону  $x \rightarrow \infty$ , не убывая по амплитуде, так что если брать значения  $x \rightarrow \infty$ , то приближение  $\rho$

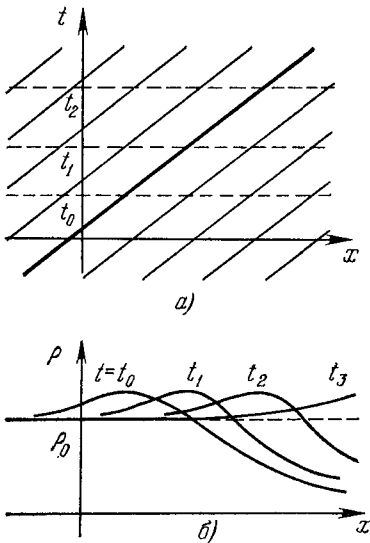


Рис. 20.

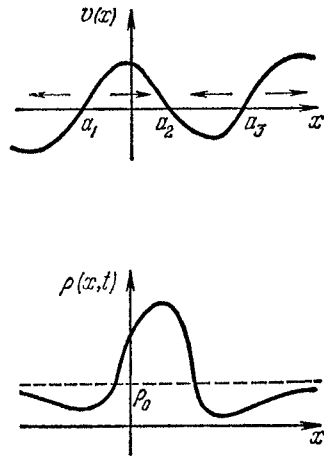


Рис. 21.

к  $\rho_0$  в них будет происходить все позже и позже; для как угодно большого  $t$  хоть где-нибудь на оси  $x$  да и найдутся точки, в которых отклонение  $\rho$  от  $\rho_0$  будет конечным, не малым. Если в этом примере совершить преобразование Галилея  $x \rightarrow \tilde{x} = x - v_0 t$  (§ I.9), то в новой системе отсчета будет  $\tilde{v}(x) \equiv 0$ , т. е. мы получаем статическую картину, в которой  $\rho(x') \equiv \rho_0(x')$  не меняется во времени и, в частности, не стремится к однородному распределению. Отсюда также видна неравномерность стремления поля  $\rho(x, t)$  в исходной системе

отсчета к однородному полю. Впрочем, если рассматривать процесс установления не на всей оси  $x$ , а на любом фиксированном интервале вида  $-\infty < x \leq x_0$ , то на нем этот процесс будет равномерным, так как область неравномерности как бы вымывается, уносится потоком направо.

Рассмотрим теперь случай, когда  $v(x)$  не сохраняет знака. Тогда каждому значению  $x=a$ , где  $v(a)=0$ , отвечает *точка покоя* (*точка застоя*) потока, т. е. *положение равновесия частицы*. Если  $v'(a) < 0$ , то  $v(x)$  сменяет знак с плюса на минус, когда  $x$ , возрастая, переходит через  $a$ ; тогда вблизи точки  $x=a$  движение частиц по обе стороны от  $a$  направлено к  $a$ , а потому рассматриваемое положение равновесия будет *асимптотически устойчивым*. Другими словами, частицы, расположенные в начальный момент времени вблизи точки  $a$ , будут и при дальнейшем движении находиться вблизи этой точки, а при  $t \rightarrow \infty$  будут стремиться к ней. При  $v'(a) > 0$  и, вообще, при расхождении знака функции  $v(x)$  вблизи точки  $x=a$ , отличного от описанного выше, положение равновесия частицы в  $a$  будет неустойчивым (ср. п. 2 § 2).

На рис. 21 показано распределение плотности среды в некоторый момент  $t > t_0$  при законе распределения скорости, показанном на том же рисунке вверху, и начальном распределении плотности  $\rho_0(x) \equiv \rho_0 = \text{const}$ . Из трех положений равновесия  $a_2$  — асимптотически устойчивое, тогда как  $a_1$  и  $a_3$  — неустойчивые.

Закон изменения плотности среды в точке покоя  $x=a$  легко подсчитать по формуле (7.6), утя, что  $\varphi(t_0; t, a) \equiv a$  (почему?):

$$\rho|_{x=a} = \rho_0(a) \exp \left[ - \int_{t_0}^t v'(a) dt \right] = \rho_0(a) \exp [ - v'(a) (t - t_0) ].$$

Таким образом, при  $v'(a) \neq 0$  получается экспоненциальное нарастание плотности в случае устойчивой точки покоя и экспоненциальное исчезновение — в случае неустойчивой точки покоя.

#### Упражнения

1. Выведите формулу (2) из общей формулы (7.6).
2. Пусть  $v(x) = v_0 - \frac{v_1}{1+x^2}$ ,  $\rho_0(x) = \rho_0 = \text{const}$ ,  $t_0 = 0$ ; найдите  $\rho(x, t)$  в случаях а,  $v_1 < v_0 > 0$ ; б)  $v_1 > v_0 > 0$ ; в)  $v_0 = 0 < v_1$ .
3. Пусть  $\rho_0(t) \equiv \text{const}$ ; найдите уравнение для точек экстремума функции  $\rho(x, t)$  при фиксированном  $t$ .
4. Напишите линейную часть разложения  $\rho(x, t)$  по степеням  $t - t_0$ .

### § 9. Дивергентная форма уравнений

При выводе уравнения неразрывности (7.1) мы исходили из закона сохранения масс. Обратное, этот закон легко вывести из уравнения неразрывности. Проведем этот обратный переход для лю-