отсчета к однородному полю. Впрочем, если рассматривать процесс установления не на всей оси x, а на любом фиксированном интервале вида $-\infty<x\leqslant x_0$, то на нем этот процесс будет равномерным, так как область неравномерности как бы вымывается, уносится потоком направо.

Рассмотрим теперь случай, когда $v(x)$ не сохраняет знака. Тогда каждому значению $x=a$, где $v(a)=0$, отвечает *точка покоя* (*точка застоя*) потока, т. е. *положение равновесия частицы*. Если $v'(a)<0$, то $v(x)$ сменяет знак с плюса на минус, когда x, возрастая, переходит через a; тогда вблизи точки $x=a$ движение частиц по обе стороны от a направлено к a, а потому рассматриваемое положение равновесия будет *асимптотически устойчивым*. Другими словами, частицы, расположенные в начальный момент времени вблизи точки a, будут и при дальнейшем движении находиться вблизи этой точки, а при $t\to\infty$ будут стремиться к ней. При $v'(a)>0$ и, вообще, при распределениях знака функции $v(x)$ вблизи точки $x=a$, отличного от описанного выше, положение равновесия частицы в a будет неустойчивым (ср. п. 2 § 2).

На рис. 21 показано распределение плотности среды в некоторый момент $t>t_0$ при законе распределения скорости, показанном на том же рисунке вверху, и начальном распределении плотности $\rho_0(x)\equiv\rho_0=\text{const}$. Из трех положений равновесия a_2 — асимптотически устойчивое, тогда как a_1 и a_3 — неустойчивые.

Закон изменения плотности среды в точке покоя $x=a$ легко подсчитать по формуле (7.6), учтя, что $\varphi(t_0;\ t,\ a)\equiv a$ (почему?):

$$\rho\,|_{x=a}=\rho_0(a)\exp\left[-\int\limits_{t_0}^{t}v'(a)\,d\tau\right]=\rho_0(a)\exp\left[-v'(a)(t-t_0)\right].$$

Таким образом, при $v'(a)\neq0$ получается экспоненциальное нарастание плотности в случае устойчивой точки покоя и экспоненциальное исчезновение — в случае неустойчивой точки покоя.

Упражнения

1. Выведите формулу (2) из общей формулы (7.6).

2. Пусть $v(x)=v_0-\dfrac{v_1}{1+x^2}$, $\rho_0(x)=\rho_0=\text{const}$, $t_0=0$; найдите $\rho(x,\ t)$ в случаях а) $v_1<v_0>0$; б) $v_1>v_0>0$; в) $v_0=0<v_1$.

3. Пусть $\rho_0(t)\equiv\text{const}$; найдите уравнение для точек экстремума функции $\rho(x,\ t)$ при фиксированном t.

4. Напишите линейную часть разложения $\rho(x,\ t)$ по степеням $t-t_0$.

§ 9. Дивергентная форма уравнений

При выводе уравнения неразрывности (7.1) мы исходили из закона сохранения масс. Обратно, этот закон легко вывести из уравнения неразрывности. Проделаем этот обратный переход для любого локального параметра $\vartheta(x, t)$ среды, предположив, что он удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial x}[v(x, t)\vartheta]+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=0, \tag{1}$$

относительно которого говорят, что оно имеет *дивергентную форму* (это означает, что производная по геометрической координате входит в уравнение с коэффициентом, равным 1).

Взамен суммарной массы теперь надо рассматривать интеграл

$$\Theta=\int_{-\infty}^{\infty}\vartheta(x, t)\,dx \tag{2}$$

(ср. общую формулу (I.6.1)); при этом мы будем предполагать, что ϑ при $x\to\pm\infty$ достаточно быстро стремится к нулю, так что вопроса о сходимости рассматриваемых интегралов не возникает.

Интеграл (2) мог бы зависеть от t; однако нетрудно проверить, что на самом деле при изменении t значение Θ не меняется. В самом деле, дифференцируя интеграл (2) по параметру t и пользуясь уравнением (1), получаем

$$\frac{d\Theta}{dt}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\,dx=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial x}(v\vartheta)\,dx=v\vartheta\Big|_{x=-\infty}-v\vartheta\Big|_{x=\infty}=0,$$

в силу предположения о поведении ϑ при $x\to\pm\infty$ ($\vartheta|_{x=\pm\infty}=0$).

Из уравнения (1) нетрудно получить и более общее утверждение о сохранении суммарной «массы» между любыми двумя подвижными частицами в среде. Речь идет об интеграле,

$$\Theta_{(x_1, x_2)}=\int_{x_1(t)}^{x_2(t)}\vartheta(x, t)\,dx, \tag{3}$$

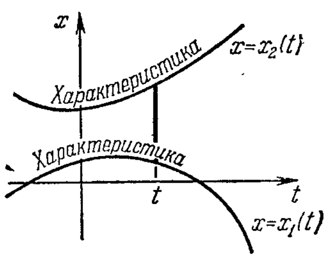

Рис. 22.

пределы которого $x=x_1(t)$ и $x=x_2(t)$ описывают движение частиц, т. е. определяют уравнение характеристик (см. рис. 22, где интервал интегрирования показан жирно). При дифференцировании интеграла (3) по t надо учесть, что в этот интеграл t входит трижды и потому в силу правила дифференцирования сложной функции производная будет представлять собой сумму трех слагаемых:

$$\frac{d}{dt}\Theta_{(x_1, x_2)}=\vartheta\Big|_{x=x_2}\frac{dx_2}{dt}-\vartheta\Big|_{x=x_1}\frac{dx_1}{dt}+\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\,dx. \tag{4}$$

Воспользовавшись дифференциальным уравнением характеристик

(3.9), а также уравнением неразрывности (1), получим

$$\frac{d}{dt}\Theta_{(x_1,\,x_2)}=\vartheta\Big|_{x=x_2}v\Big|_{x=x_2}-\vartheta\Big|_{x=x_1}v\Big|_{x=x_1}-\int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}(v\vartheta)=0,$$

откуда $\Theta_{(x_1,x_2)}=\mathrm{const}$, что и требовалось доказать.

Нетрудно указать смысл всех трех членов в правой части (4): это скорость истечения «массы» через верхний конец отрезка, изображенного жирно на рис. 22 (без учета перемещения этого конца), скорость истечения «массы» через его нижний конец и скорость возрастания «массы» на самом отрезке. Если «масса» каждого участка среды в процессе его эволюции не меняется, то сумма этих скоростей должна равняться нулю. Это очевидное утверждение вытекает также из отмеченного в § I. 9 свойства потоков: поток массы через сечение, движущееся со скоростью вещества, равен нулю.

Подчеркнем, что вывод об инвариантности интеграла (3) мы получили без интегрирования этого уравнения, опираясь только на само это уравнение и дифференциальное уравнение характеристик. Это одно из полезных следствий применения понятия характеристики.

Аналогичное рассмотрение суммарной «массы» между двумя неподвижными точками a и b оси x приводит к равенству

$$\frac{d}{dt}\Theta_{(a,\,b)}=\vartheta\Big|_{x=a}v\Big|_{x=a}-\vartheta\Big|_{x=b}v\Big|_{x=b}, \tag{5}$$

о котором мы уже упоминали в § I.7 (см. формулу (I. 7.11)). В теории ударных волн, теории распространения пламени и в некоторых других областях важную роль играет соотношение (5) в случае, когда $a=-\infty$, $b=\infty$, а значения параметра ϑ и скорости v на бесконечности известны и, вообще говоря, о т л и ч н ы о т н у л я и не одинаковы при $x=-\infty$ и при $x=\infty$; этот случай называется *режимом распространения*. Обозначая $\Theta_{(-\infty,\,\infty)}=\Theta$, $\vartheta|_{x=\pm\infty}=\vartheta_\pm$, $v|_{x=\pm\infty}=v_\pm$, получаем из (5)

$$\frac{d\Theta}{dt}=\vartheta_-v_--\vartheta_+x_+. \tag{6}$$

Производная в левой части нуждается в некотором разъяснении, так как интеграл (2), определяющий величину Θ, в данном случае оказывается расходящимся (почему?). Однако это не препятствует возможности говорить о скорости его изменения, так как она оказывается конечной; строго говоря, под $\frac{d\Theta}{dt}$ надо понимать предел $\frac{d\Theta_{(-N,\,N)}}{dt}$ при $N\to\infty$, что вполне согласуется с физическим смыслом бесконечности как неопределенно большого значения. (Действия над расходящимися интегралами мы рассматривали также в ЭПМ, §§ III. 6 и X. 6.)

Итак, скорость изменения величины Θ определяется без построения закона $\vartheta(x,t)$ эволюции распределения величины ϑ, который при заданной скорости $v(x, t)$ может иметь различный конкретный вид в зависимости от начального условия $\vartheta|_{t=t_0}=\vartheta_0(x)$. Наиболее прост случай $v(x, t)\equiv v_0=\text{const}$, для которого $\vartheta(x, t)=\vartheta_0(x-v_0(t-t_0))$. В этом случае формула (6) приобретает вид

$$\frac{d\Theta}{dt}=v_0(\vartheta_- - \vartheta_+)$$

и может быть легко выведена из рис. 20, что мы предоставляем читателю.

Математическим обобщением уравнения (1) служит уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x}[a(x, t)\vartheta]+\frac{\partial}{\partial t}[b(x, t)\vartheta]=0. \qquad (7)$$

В математических работах о левой части такого уравнения также говорят, что она имеет дивергентную форму, так как если отвлечься от физического смысла независимых переменных — тогда лучше поменять обозначение t на y и трактовать x, y как равноправные геометрические координаты (что формально вполне допустимо),— то эту левую часть можно переписать в виде $\operatorname{div}(a\vartheta\boldsymbol{i}+b\vartheta\boldsymbol{j})$, где $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$— единичные векторы осей x и y (см. § I. 8). После этого, в соответствии с § I. 8, можно рассмотреть стационарное двумерное «движение» в фиктивном времени τ среды с локальным параметром ϑ и полем скоростей $\boldsymbol{w}=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}$; при этом соотношение (7) можно истолковать как соответствующий закон сохранения. Таким образом, нестационарная одномерная задача с независимыми переменными x, t оказывается эквивалентной некоторой стационарной) так как $\boldsymbol{w}$ не зависит от τ) двумерной задаче с фиктивным временем τ.

Если раскрыть в левой части уравнения (7) квадратные скобки, то его можно преобразовать к виду (5.1), где $g=-(a'_x+b'_t)\vartheta$. Отсюда ясно, что задачу Коши и другие аналогичные задачи для уравнения (7) можно решать с помощью перехода к характеристикам, как это было описано в §§ 5—6, причем дифференциальное уравнение характеристик имеет для уравнения (7) тот же вид (5.2), что и для уравнения (5.1).

Если в уравнении (7) обозначить $b\vartheta=\vartheta_1$, $a/b=v$, т. е. $a\vartheta=v\vartheta_1$, то для ϑ_1 получится уравнение (1), а характеристики нового уравнения будут удовлетворять уравнению $\frac{dx}{dt}=v=\frac{a}{b}$, т. е. совпадать с характеристиками уравнения (7). Поэтому в силу доказанного выше интеграл

$$\int\limits_{x_1(t)}^{x_2(t)} b(x, t)\vartheta(x, t)\,dx, \qquad (8)$$

пределы которого скользят по характеристикам, не зависит от времени t. Впрочем, это легко доказать независимо с помощью дифференцирования интеграла (8) по t и использования уравнений (7) и (5.2), что мы предоставляем читателю.

Упражнение

Найдите решение уравнения $(x\vartheta)'_x-(2t\vartheta)'_t=0$ $(t\geqslant 1)$ при начальном условии $\vartheta|_{t=1}=3x$. Положив $x_1=0$, $x_2=1$ при $t=1$, проверьте закон сохранения «массы».

§ 10. Образование складок (перехлесты)

Мы уже упоминали в § 1, что если скорости частиц задаются в лагранжевых координатах (другими словами, законы движения различных частиц задаются независимо), то в процессе эволюции среды одни частицы могут обгонять другие. Сейчас мы рассмотрим этот вопрос более подробно.

Рассмотрим сначала наиболее простой вариант, когда скорость каждой частицы остается неизменной (частицы движутся по инерции), но для различных частиц, вообще говоря, различной, $v=v(\xi)$. Тогда каждая частица будет двигаться по линейному закону

$$x=\xi+v(\xi)(t-t_0). \tag{1}$$

Допустим, что зависимость $v(\xi)$ такая, как показано на рис. 23 пунктиром. Это означает, что все частицы движутся направо, но некоторый средний участок среды имеет сравнительно более высокую скорость. Ясно, что тогда через некоторый промежуток времени эти более быстрые частицы обгонят движущиеся перед ними (т. е. расположенные правее них) медленные частицы и в среде как бы образуется *складка*; как говорят, произойдет *перехлест*.

Рассмотрим явление перехлеста подробнее. Для этого представим себе зависимости $x(\xi)$ в последовательные моменты времени. Графики этих зависимостей показаны на рис. 23; их легко получить из графиков $x=\xi$ и $v=v(\xi)$, так как при фиксированном t множитель $t-t_0$ в формуле (1) представляет собой просто коэффициент пропорциональности (продумайте это построение!). Мы видим, что с ростом t участок графика $x(\xi)$, на котором $v'(\xi)<0$ (это и есть участок, на котором быстрые частицы догоняют медленные!), становится все более пологим, и после некоторого момента $t_{кр}$ на этом графике образуется участок убывания, который постепенно разрастается. Для наглядности график $x(\xi)$ при некотором $t=t_2>t_{кр}$ изображен отдельно на рис. 24. Обозначим, как на этом рисунке, буквами Q, R точки локального экстремума функции $x(\xi)$, буквами A, B — соответствующие экстремальные значения, а буквами P, S — отличные от точек экстремума решения уравнений $x(\xi)=A$ и $x(\xi)=B$. Тогда ясно, что каждому значению x, содержащемуся