

пределы которого скользят по характеристикам, не зависит от времени t . Впрочем, это легко доказать независимо с помощью дифференцирования интеграла (8) по t и использования уравнений (7) и (5.2), что мы предоставляем читателю.

Упражнение

Найдите решение уравнения $(x\dot{\phi})'_x - (2t\dot{\phi})'_t = 0$ ($t \geq 1$) при начальном условии $\dot{\phi}|_{t=1} = 3x$. Положив $x_1=0$, $x_2=1$ при $t=1$, проверьте закон сохранения «массы».

§ 10. Образование складок (перехлесты)

Мы уже упоминали в § 1, что если скорости частиц задаются в лагранжевых координатах (другими словами, законы движения различных частиц задаются независимо), то в процессе эволюции среды одни частицы могут обгонять другие. Сейчас мы рассмотрим этот вопрос более подробно.

Рассмотрим сначала наиболее простой вариант, когда скорость каждой частицы остается неизменной (частицы движутся по инерции), но для различных частиц, вообще говоря, различной, $v=v(\xi)$. Тогда каждая частица будет двигаться по линейному закону

$$x = \xi + v(\xi)(t - t_0). \quad (1)$$

Допустим, что зависимость $v(\xi)$ такая, как показано на рис. 23 пунктиром. Это означает, что все частицы движутся направо, но некоторый средний участок среды имеет сравнительно более высокую скорость. Ясно, что тогда через некоторый промежуток времени эти более быстрые частицы обгонят движущиеся перед ними (т. е. расположенные правее них) медленные частицы и в среде как бы образуется *складка*; как говорят, произойдет *перехлест*.

Рассмотрим явление перехлеста подробнее. Для этого представим себе зависимости $x(\xi)$ в последовательные моменты времени. Графики этих зависимостей показаны на рис. 23; их легко получить из графиков $x=\xi$ и $v=v(\xi)$, так как при фиксированном t множитель $t - t_0$ в формуле (1) представляет собой просто коэффициент пропорциональности (продумайте это построение!). Мы видим, что с ростом t участок графика $x(\xi)$, на котором $v'(\xi) < 0$ (это и есть участок, на котором быстрые частицы догоняют медленные!), становится все более пологим, и после некоторого момента $t_{кр}$ на этом графике образуется участок убывания, который постепенно разрастается. Для наглядности график $x(\xi)$ при некотором $t=t_2 > t_{кр}$ изображен отдельно на рис. 24. Обозначим, как на этом рисунке, буквами Q, R точки локального экстремума функции $x(\xi)$, буквами A, B — соответствующие экстремальные значения, а буквами P, S — отличные от точек экстремума решения уравнений $x(\xi) = A$ и $x(\xi) = B$. Тогда ясно, что каждому значению x , содержащемуся

между A и B , отвечает три значения ξ , для которых $x(\xi)$ принимает заданные значения, именно,

$$P < \xi_1 < Q < \xi_2 < R < \xi_3 < S$$

(см. рис. 24). Таким образом, в момент t_2 участок A, B оси x оказался покрытым тремя слоями среды, которые в момент $t=t_0$ занимали положения $P \leq \xi \leq Q, Q \leq \xi \leq R, R \leq \xi \leq S$ соответственно. Конечно, все значения A, B, P, Q, R, S зависят от t .

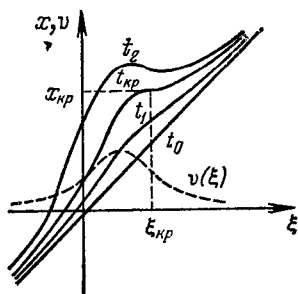


Рис. 23.

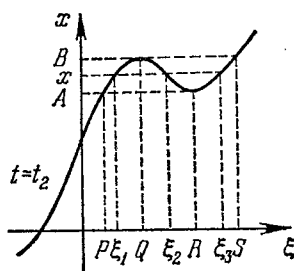


Рис. 24.

За образованием складки легко проследить также, наблюдая за графиком зависимости $v(x)$ в последовательные моменты времени (рис. 25). При $t=t_0$ будет $x=\xi$, т. е. зависимость $v(x)$ совпадает с заданной зависимостью $v(\xi)$. При возрастании t исходный график $v(x)$ деформируется, так как каждая его точка движется направо тем быстрее, чем она расположена выше. В результате этого в момент $t_{кр}$ у графика образуется вертикальная касательная (при $x=x_{кр}$, см. рис. 25), после чего и возникает переხлест. На рис. 25 хорошо видно, что каждой точке участка A, B отвечают три различные скорости частиц.

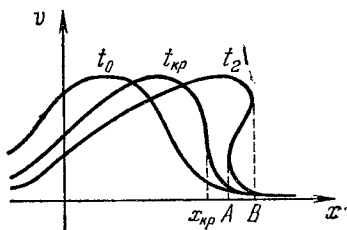


Рис. 25.

Как найти момент начала перехлеста, а после этого момента — эволюционирующие границы складки? Из рис. 23 ясно, что значения $x=A$ и $x=B$, определяющие границу складки, удовлетворяют соотношению

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} \equiv 1 + v'(\xi)(t - t_0) = 0. \quad (2)$$

Поэтому указанные значения x получаются, если из соотношений (1) и (2) исключить ξ . В момент начала перехлеста, как видно из рис. 23,

при критическом значении $\xi_{кр}$ график $x=x(\xi)$ будет иметь точку перегиба (с горизонтальной касательной). По известному признаку точки перегиба получаем, что должно быть

$$\frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \equiv v''(\xi)(t-t_0) = 0$$

(здесь и в (2) приходится писать частные производные от x по ξ , так как x зависит еще от t), откуда

$$v''(\xi) = 0. \quad (3)$$

Уравнение (3) можно получить также следующим образом. Из равенства (2) мы видим, что момент попадания частицы на границу складки определяется равенством

$$t = t_0 - \frac{1}{v'(\xi)}.$$

В момент начала перехлеста $t(\xi)$ должно принимать минимальное значение. Отсюда

$$\frac{dt}{d\xi} \equiv \frac{v''}{v'^2} = 0,$$

и мы вновь приходим к условию (3).

Уравнение (3) определяет критические значения $\xi = \xi_{кр}$, т. е. начальное положение частиц, в которых начнут образовываться складки. Найдя такое значение, из равенства (2) получаем момент начала перехлеста

$$t_{кр} = t_0 - \frac{1}{v'(\xi_{кр})},$$

а отсюда, с помощью формулы (1), — точку, из которой начинает развиваться складка:

$$x_{кр} = \xi_{кр} - \frac{v(\xi_{кр})}{v'(\xi_{кр})}.$$

Покажем теперь, как проявляется перехлест в поведении семейства характеристик в плоскости x, t . Так как уравнение (1) линейно относительно x и t , то каждая характеристика, которая получается при фиксировании значения ξ , представляет собой прямую линию. Таким образом, характеристики образуют однопараметрическое семейство линий с уравнением (1), в котором ξ служит параметром. Мы показали выше, что граница складки определяется добавочным соотношением (2). Но это соотношение получается, если продифференцировать уравнение семейства (1) по параметру ξ . Как известно (см., например, ЭПМ, § IV.5), эта процедура для любого однопараметрического семейства линий приводит к огибающей этого семейства.

Итак, линия на плоскости x, t , ограничивающая область складки среды, является огибающей семейства характеристик; эта оги-

бающая называется *каустикой*. Нетрудно написать ее параметрические уравнения, приняв ξ за параметр: из (2) и (1) получаем

$$t = t_0 - \frac{1}{v'(\xi)}, \quad x = \xi - \frac{v(\xi)}{v'(\xi)}. \quad (4)$$

Рассмотрим строение каустики вблизи мировой точки*) $M_{кр}$, определяющей начало образования складки. Мы видели, что при значении $\xi = \xi_{кр}$ должно выполняться соотношение (3). Поэтому

$$\frac{dt}{d\xi} \Big|_{\xi = \xi_{кр}} = \frac{v''}{v'^2} \Big|_{\xi = \xi_{кр}} = 0, \quad \frac{dx}{d\xi} \Big|_{\xi = \xi_{кр}} = \left(1 - \frac{v'v''}{v'^2} \right) \Big|_{\xi = \xi_{кр}} = 0.$$

Дальнейшее дифференцирование, которое мы предоставляем читателю, показывает, что последующие производные при $\xi = \xi_{кр}$, вообще говоря, отличны от нуля. Поэтому разложение в ряд Тейлора функций (4) в окрестности точки $\xi = \xi_{кр}$ имеет вид

$$t = t_{кр} + a_2(\xi - \xi_{кр})^2 + a_3(\xi - \xi_{кр})^3 + \dots, \quad x = x_{кр} + b_2(\xi - \xi_{кр})^2 + b_3(\xi - \xi_{кр})^3 + \dots, \quad (5)$$

где буквами a_2, a_3, b_2, b_3 обозначены какие-то постоянные, а многоточиями — члены высшего порядка малости.

Чтобы представить себе вид линии (5) при ξ , близких к $\xi_{кр}$, отбросим члены, обозначенные многоточием; мы получим

$$s = a_2\eta^2 + a_3\eta^3, \quad y = b_2\eta^2 + b_3\eta^3 \quad (s = t - t_{кр}, \quad y = x - x_{кр}, \quad \eta = \xi - \xi_{кр}). \quad (6)$$

Отсюда легко выразить η^2 и η^3 через s и y , как из системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными. Это даст $\eta^2 = \alpha s + \beta y$, $\eta^3 = \gamma s + \delta y$, где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — некоторые постоянные. Обозначив, далее,

$$\alpha s + \beta y = u, \quad \gamma s + \delta y = v, \quad (7)$$

мы с помощью возведения в степень получим соотношение

$$u^3 = v^2, \quad \text{т. е. } u = v^{2/3}.$$

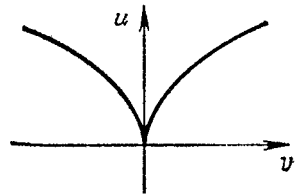


Рис. 26.

Получилась так называемая полукубическая парабола (рис. 26), имеющая в начале координат *точку возврата*: линия, подходя к этой точке, отходит от нее вспять, имея там острие с нулевым углом и бесконечно большой кривизной. Но так как формулы (7) определяют линейное отображение плоскости s, y на плоскость u, v , т. е. комбинацию равномерных растяжений и поворота (см. § III.3), то и в плоскости s, y линия (6) будет иметь точку возврата в начале

*) Мировая точка есть точка в плоскости x, t (для пространственных движений — точка в 4-мерном пространстве x, y, z, t), определяющая место и момент какого-либо события.

координат. А так как члены высшего порядка малости оказывают существенное влияние только при удалении от исследуемой точки, то мы приходим к выводу, что каустика (5) будет в критической точке $M_{кр}$ иметь точку возврата.

Типичная картина расположения характеристик показана на рис. 27, где каустика (K) изображена более жирно. Видно, как с возрастанием времени в середине изображенного участка оси x образуется уплотнение, а начиная с момента $t_{кр}$ в среде образуется складка. На рис. 28 изображена ситуация внутри этой складки: в момент

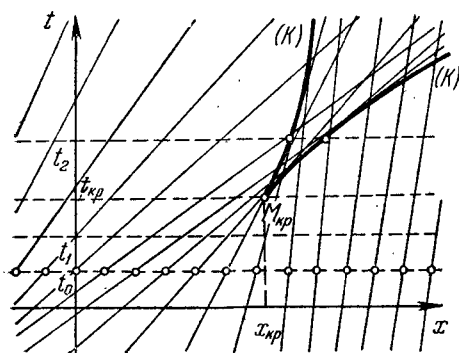


Рис. 27.

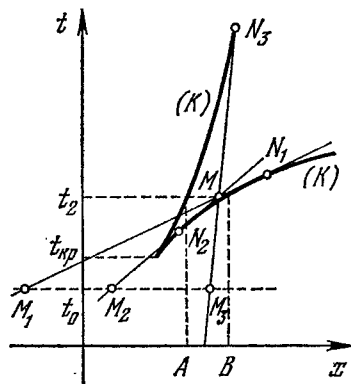


Рис. 28.

$t_2 > t_{кр}$ складкой служит участок A, B оси x ; в произвольной мировой точке M , отвечающей моменту t_2 и точкам складки, имеются частицы, пришедшие из M_1, M_2 и M_3 и обладающие все различными скоростями. Законы движения этих частиц изображаются характеристиками, показанными на рис. 28 и касающимися каустики в точках N_1, N_2 и N_3 , соответственно.

На рис. 27 видно удобство горизонтального расположения оси геометрической координаты x при изображении плоскости x, t , так как тогда сечение этой плоскости прямыми $t = \text{const}$ при дискретных значениях t позволяет легко представить себе развитие процесса на оси x ; см. по этому поводу также рис. 11.

Из уравнений (4) видно, что каждому значению ξ , для которого $v'(\xi) \neq 0$, отвечает вполне определенная точка каустики; это точка, в которой соответствующая характеристика пересекается бесконечно близкими, т. е. мировая точка, отвечающая достижению соответствующей частицы бесконечно близкими. Такая встреча состоится при некотором $t > t_0$, зависящем от ξ , если $v'(\xi) < 0$, и при некотором $t < t_0$, т. е. по сравнению с t_0 в прошлом, если $v'(\xi) > 0$. Таким образом, при любом начальном распределении скоростей частиц, отличном от тривиального $v(\xi) \equiv \text{const}$, перехлест обязательно имеет место либо в будущем, либо в прошлом. В процессе эволюции среды

в ней могут образовываться новые складки, так как из каждой точки перегиба $\bar{\xi}$ функции $v(\bar{\xi})$ должна со временем образоваться складка — в будущем, если $v'(\bar{\xi}) < 0$, и в прошлом, если $v'(\bar{\xi}) > 0$. Из рис. 23 ясно также, что если в начальный момент среда не имела складок и $v(\pm\infty)$ принимает конечные значения, то раз образовавшаяся складка не может в дальнейшем распрямиться, т. е. складки могут только добавляться.

Отметим, что все сказанное в последнем абзаце существенно связано с конкретным видом (1) закона движения частиц, другими словами, с предположением о постоянстве скорости движения каждой частицы.

Посмотрим теперь, как при образовании складки меняется плотность среды. Это изменение можно наглядно представить из рис. 27.

В самом деле, если на прямой $t = t_0$ сетка частиц выбрана так, чтобы расстояние между соседними частицами было обратно пропорционально локальной плотности, т. е. чтобы «густота» частиц была прямо пропорциональна этой плотности (для этого надо отметить каждую частицу, номер которой кратен некоторому числу), то в силу сохранения числа частиц эта пропорциональность сохранится при любом t , что и дает возможность увидеть плотность на рисунке. В частности, видно, что внутри складки, у ее концов расстояние между близкими характеристиками приобретает высший порядок малости, и потому плотность среды становится бесконечной; эта плотность имеет вид суммы трех функций, изображенных на рис. 29 и отвечающих трем перекрывающимся «слоям» среды.

Это утверждение легко подтвердить и аналитически. В самом деле, в силу § I. 3

$$\rho(x, t) = \rho_0(\xi) \left| \frac{dx}{d\xi} \right|^{-1} = \frac{\rho_0(\xi)}{|1 + v'(\xi)(t - t_0)|} \quad (8)$$

(обратите внимание на знак абсолютной величины в этой формуле!). Однако на концах складки, т. е. на каустике выполняется соотношение (2), т. е. знаменатель в правой части (8) обращается в нуль, а потому ρ — в бесконечность. Нетрудно разобраться в порядке этой бесконечности. В момент $t_{кр}$, когда у графика $v(x)$ появляется вертикальная точка перегиба, зависимость между приращениями переменных, с точностью до малых высшего порядка, имеет вид $x - x_{кр} \sim (v_{кр} - v)^3 \sim (\xi - \xi_{кр})^3$ (\sim — знак пропорциональности). Дифференцируя это равенство, получаем $dx \sim (\xi - \xi_{кр})^2 d\xi$, откуда

$$\rho \sim \left| \frac{d\xi}{dx} \right| \sim (\xi - \xi_{кр})^{-2} \sim (x - x_{кр})^{-2/3}.$$

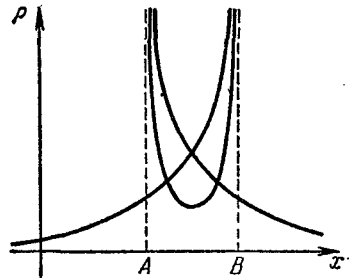


Рис. 29.

Аналогично получаем, что после образования складки у ее концов A и B плотность имеет выражения

$$\rho \propto (x - A)^{-1/2} \quad \text{и} \quad \rho \propto (B - x)^{-1/2}.$$

Естественно, что особенности получаются интегрируемые, так как суммарная масса частиц конечная. Итак, при образовании складки плотности меняются следующим образом: в среде образуется уплотнение, которое в некоторый момент превращается в особенность порядка $2/3$; эта особенность тут же расщепляется на две особенности порядка $1/2$, расходящиеся друг от друга.

Остановимся еще на роли знака производной $\frac{dx}{d\xi}$. Ясно, что если эта производная положительная, то складок нет, они появляются с возникновением участков, на которых она отрицательная. В связи с этим заметим также, что хотя плотность всех слоев среды положительная (см. рис. 29), но при формальных вычислениях часто удобнее считать, что на «вывернутых» слоях среды, для которых $\frac{dx}{d\xi} < 0$, будет и $\rho < 0$: например, при такой договоренности можно пользоваться формулами

$$\rho = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^{-1} \rho_0, \quad M = \int \rho_0 d\xi = \int \rho_0 \frac{d\xi}{dx} dx = \int \rho dx$$

без простановки знака абсолютной величины.

Любопытен вырожденный случай, для которого скорости частиц в начальный момент распределены по линейному закону, $v(\xi) = \alpha\xi + \beta$, где α и β — некоторые постоянные. В этом случае уравнения (4) каустики приобретают вид

$$t = t_0 - \frac{1}{\alpha}, \quad x = \xi - \frac{\alpha\xi + \beta}{\alpha}, \quad \text{т. е.} \quad x = -\frac{\beta}{\alpha}.$$

Таким образом, t и x получаются постоянными, т. е. каустика вырождается в точку, все характеристики проходят через одну точку. Это означает, что в момент $t_{\text{кр}} = t_0 - \frac{1}{\alpha}$ ($t_{\text{кр}} > t_0$, если $\alpha < 0$) частицы со всей оси x на мгновение фокусируются в точку $x_{\text{кр}} = -\beta/\alpha$, после чего вновь разлетаются из нее.

Скажем теперь коротко о более общем случае, когда скорость каждой частицы не обязана быть постоянной, а меняется по заданному закону $v = v(\xi, t)$. Закон движения частиц, взамен (1), будет иметь вид

$$x = \xi + \int_{t_0}^t v(\xi, \tau) d\tau. \quad (9)$$

Характеристики на рис. 27 теперь будут, вообще говоря, криволинейными, но качественно картина будет знакомой — огибающая семейства характеристик (каустика) определит расположение скла-

док среды. Уравнение каустики получается из сочетания равенства (9) с результатом его дифференцирования по параметру ξ :

$$0 = 1 + \int_{t_0}^t v_{\xi}^{\prime}(\xi, \tau) d\tau, \quad (10)$$

однако в общем случае перейти к более простой форме системы уравнений (9) — (10) (наподобие (4)) нельзя. Формула (10) определяет в принципе t как функцию ξ , и потому дифференцирование по ξ дает

$$0 = v_{\xi}^{\prime}(\xi, t) \frac{dt}{d\xi} + \int_{t_0}^t v_{\xi\xi}^{\prime\prime}(\xi, \tau) d\tau. *)$$

Поэтому равенство $dt/d\xi=0$, определяющее критическую ситуацию возникновения складки, приводит к уравнению

$$\int_{t_0}^t v_{\xi\xi}^{\prime\prime}(\xi, \tau) d\tau = 0,$$

которое совместно с (10) дает $\xi_{кр}$ и $t_{кр}$; после этого из (9) можно найти $x_{кр}$. Картина, показанная на рис. 25, теперь изменится в том смысле, что из-за переменной скорости движения частиц точки исходного графика $v(x|_{t=t_0})$ при переходе к следующим значениям t будут перемещаться уже не обязательно параллельно оси x .

Однако качественно графики зависимости $v(x)$ останутся теми же — при образовании складки произойдет переход через точку

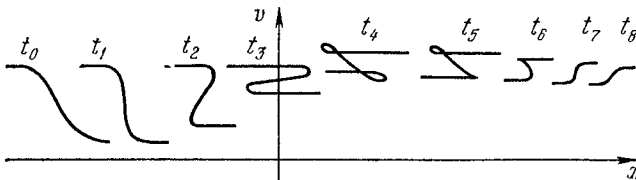


Рис. 30.

перегиба с вертикальной касательной. Поэтому и характер особенностей у плотности будет тот же, что и раньше.

Принципиально новой является возможность «рассасывания» образовавшейся складки: оставшие частицы могут пойти быстрее и восстановить былую упорядоченность. На рис. 30 показана возможная эволюция графика $v(x)$ в последовательные моменты времени при образовании складки, начиная с момента t_1 , и ее рассасывании, начиная с момента t_7 . (Показана только часть графика вблизи складки.)

*) Напомним, что под v_{ξ}^{\prime} и $v_{\xi\xi}^{\prime\prime}$ понимается соответственно $\partial v / \partial \xi$ и $\partial^2 v / \partial \xi^2$.

Упражнения

1. Пусть $\rho_0(\xi) = \text{const}$, $t_0 = 0$, $v(\xi) = \frac{1}{1 + \xi^2}$. Найдите уравнение каустики, критические параметры и зависимость $\rho(x, t)$.
2. То же — для $v(\xi, t) = 2\xi^2 t$.
3. Рассмотрите случай, когда $v = v(\xi)$, причем $v(-\xi) = -v(\xi)$ и $v'(0) < 0$.
4. Укажите общее свойство точек перегиба графиков рис. 25 и выведите отсюда условие (3) для критической точки.

§ 11. Движение с запрещенным обгоном

Возможен другой вариант задачи об образовании уплотнений, приводящий к возникновению сгустков конечной массы, т. е. дельтаобразных слагаемых у плотности. Именно, допустим, что если более быстрая частица догоняет более медленную, то не проходит сквозь нее, как это считалось раньше, а обе частицы слипаются и начинают идти с некоторой промежуточной скоростью (наподобие того, как это было бы на шоссе, если запретить обгон, но разрешить подталкивание автомобилями друг друга). Конечно, тогда не совсем точно называть частицы невзаимодействующими, скорее, это взаимодействие контактного характера, проявляющееся в виде прилипания, когда координаты частиц в некоторый момент совпадают,

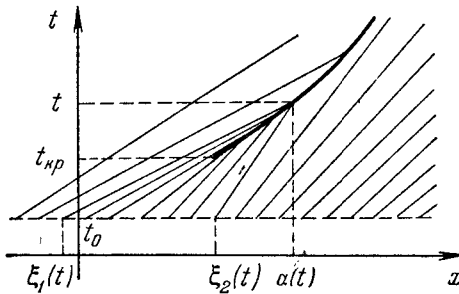


Рис. 31.

т. е. когда частицы находятся в контакте, и пропадающее, когда частицы отстают друг от друга на конечное расстояние.

При сделанном предположении о невозможности обгона, после достижения критического момента $t_{кр}$ (который находится так же, как в § 10) в среде начинает развиваться сгусток бесконечно малой протяженности, но положительной массы. Ограничимся для простоты случаем, когда скорость $v(\xi)$ каждой частицы в процессе ее движения не меняется, и обозначим через $\mu(t)$ массу сгустка, через $a(t)$ — его координату, а через $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ (рис. 31) — границы интервала частиц, слепившихся в сгусток; отметим, что скорость $v(x, t)$ при $x = a(t)$ имеет разрыв. Ясно, что должно быть

$$\mu(t) = \int_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} \rho_0(\xi) d\xi, \tag{1}$$

$$a(t) = \xi_1(t) + v(\xi_1(t))(t - t_0) = \xi_2(t) + v(\xi_2(t))(t - t_0).$$

Таким образом, четыре функции $\mu(t)$, $a(t)$, $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ связаны тре-