Упражнения

1. Пусть $\rho_0(\xi) = \mathrm{const}$, $t_0 = 0$, $v(\xi) = \frac{1}{1+\xi^2}$. Найдите уравнение каустики, критические параметры и зависимость $\rho(x, t)$.

2. То же — для $v(\xi, t) = 2\xi^2 t$.

3. Рассмотрите случай, когда $v = v(\xi)$, причем $v(-\xi) \equiv -v(\xi)$ и $v'(0) < 0$.

4. Укажите общее свойство точек перегиба графиков рис. 25 и выведите отсюда условие (3) для критической точки.

§ 11. Движение с запрещенным обгоном

Возможен другой вариант задачи об образовании уплотнений, приводящий к возникновению сгустков конечной массы, т. е. дельтаобразных слагаемых у плотности. Именно, допустим, что если более быстрая частица догоняет более медленную, то не проходит сквозь нее, как это считалось раньше, а обе частицы слипаются и начинают идти с некоторой промежуточной скоростью (наподобие того, как это было бы на шоссе, если запретить обгон, но разрешить подталкивание автомашинами друг друга). Конечно, тогда не совсем точно называть частицы невзаимодействующими, скорее, это взаимодействие контактного характера, проявляющееся в виде прилипания, когда координаты частиц в некоторый момент совпадают, т. е. когда частицы находятся в контакте, и пропадающее, когда частицы отстоят друг от друга на конечное расстояние.

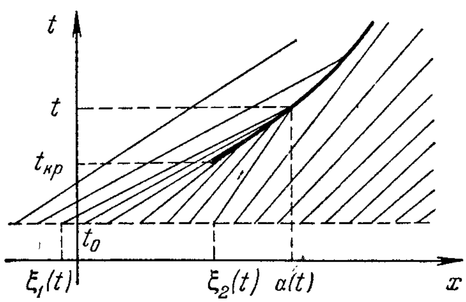

Рис. 31.

При сделанном предположении о невозможности обгона, после достижения критического момента $t_{кр}$ (который находится так же, как в § 10) в среде начинает развиваться сгусток бесконечно малой протяженности, но положительной массы. Ограничимся для простоты случаем, когда скорость $v(\xi)$ каждой частицы в процессе ее движения не меняется, и обозначим через $\mu(t)$ массу сгустка, через $a(t)$ — его координату, а через $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$ (рис. 31) — границы интервала частиц, слепившихся в сгусток; отметим, что скорость $v(x, t)$ при $x = a(t)$ имеет разрыв. Ясно, что должно быть

$$\mu(t) = \int\limits_{\xi_1(t)}^{\xi_2(t)} \rho_0(\xi)\, d\xi, \tag{1}$$

$$a(t) = \xi_1(t) + v(\xi_1(t))(t - t_0) = \xi_2(t) + v(\xi_2(t))(t - t_0).$$

Таким образом, четыре функции $\mu(t)$, $a(t)$, $\xi_1(t)$, $\xi_2(t)$ связаны тремя уравнениями и потому для их решения при $t \geqslant t_{\text{кр}}$ (до $t=t_{\text{кр}}$ решения нет) требуется то или иное дополнительное предположение о характере взаимодействия частиц при их столкновении. Например, если при переходе частиц в сгусток сохраняется количество движения, то имеет место уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\mu \frac{da}{dt}\right) = -\frac{d\xi_1}{dt} \rho_0(\xi_1)\, v(\xi_1) + \frac{d\xi_2}{dt} \rho_0(\xi_2)\, v(\xi_2).$$

Это уравнение вместе с (1) дает возможность получить все четыре неизвестные функции от t с помощью интегрирования шагами по времени, на чем мы здесь не будем останавливаться (ср. ЭПМ, § VIII.6).

Как и в § 10, возможно образование новых сгустков. Что касается обратного процесса, то хотя теоретически можно представить себе случай рассасывания сгустка, но реальнее случай, когда взамен этого в среде образуются пустоты (ср. § 12), так как обычно процесс образования сгустка связан с переходом механической энергии в тепловую и излучением последней и потому необратим.

Упражнения

1. Пусть $\rho_0(\xi) = \text{const}$, $v(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2}$. Приняв предположение о невозможности обгона частицами друг друга и о сохранении количества движения, выпишите систему дифференциальных уравнений для $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, определяющую эволюцию сгустка частиц, и соответствующие начальные условия.

2. Рассмотрите случай, когда $v(-\xi) \equiv -v(\xi)$, $v'(0) < 0$, $\rho(-\xi) \equiv \rho(\xi)$.

§ 12. Поле скоростей, обладающее особенностями

Вернемся к задаче § 7 о построении плотности потока по заданному в координатах Эйлера полю $v(x, t)$ его скоростей и начальной плотности $\rho_0(x)$. Как мы говорили в § 1, такое поле допускает наглядную интеграцию в виде системы моторчиков, стоящих на берегу и придающих частицам потока скорости по заданному закону. Ясно, что если в процессе движения задание частицы приближается к передним, т. е. если $v'_x < 0$, то плотность порции частиц возрастает; формально это вытекает из равенства

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial v}{\partial x}\rho. \qquad (1) = (7.4)$$

Однако, если зависимость $v(x, t)$ достаточно регулярная (в силу (1) достаточно, чтобы производная v'_x оставалась конечной), то частицы не могут догнать одна другую, о чем уже говорилось в § 1. Оказывается, если поле v имеет особенности, то такое сближение может быть столь активным, что задние частицы настигнут передние и в среде возникнет бесконечно малая по размерам порция конечной массы, т. е. дельтаобразной плотности. В силу формулы (1)