мя уравнениями и потому для их решения при $t \geqslant t_{кр}$ (до $t=t_{кр}$ решения нет) требуется то или иное дополнительное предположение о характере взаимодействия частиц при их столкновении. Например, если при переходе частиц в сгусток сохраняется количество движения, то имеет место уравнение

$$\frac{d}{dt}\left(\mu \frac{da}{dt}\right) = -\frac{d\xi_1}{dt}\rho_0(\xi_1)\,v(\xi_1) + \frac{d\xi_2}{dt}\rho_0(\xi_2)\,v(\xi_2).$$

Это уравнение вместе с (1) дает возможность получить все четыре неизвестные функции от t с помощью интегрирования шагами по времени, на чем мы здесь не будем останавливаться (ср. ЭПМ, § VIII.6).

Как и в § 10, возможно образование новых сгустков. Что касается обратного процесса, то хотя теоретически можно представить себе случай рассасывания сгустка, но реальнее случай, когда взамен этого в среде образуются пустоты (ср. § 12), так как обычно процесс образования сгустка связан с переходом механической энергии в тепловую и излучением последней и потому необратим.

Упражнения

1. Пусть $\rho_0(\xi) = \text{const}$, $v(\xi) = \dfrac{1}{1+\xi^2}$. Приняв предположение о невозможности обгона частицами друг друга и о сохранении количества движения, выпишите систему дифференциальных уравнений для $\xi_1(t)$ и $\xi_2(t)$, определяющую эволюцию сгустка частиц, и соответствующие начальные условия.

2. Рассмотрите случай, когда $v(-\xi) \equiv -v(\xi)$, $v'(0)<0$, $\rho(-\xi) \equiv \rho(\xi)$.

§ 12. Поле скоростей, обладающее особенностями

Вернемся к задаче § 7 о построении плотности потока по заданному в координатах Эйлера полю $v(x, t)$ его скоростей и начальной плотности $\rho_0(x)$. Как мы говорили в § 1, такое поле допускает наглядную интеграцию в виде системы моторчиков, стоящих на берегу и придающих частицам потока скорости по заданному закону. Ясно, что если в процессе движения задание частицы приближается к передним, т. е. если $v'_x<0$, то плотность порции частиц возрастает; формально это вытекает из равенства

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\partial v}{\partial x}\rho. \qquad (1) = (7.4)$$

Однако, если зависимость $v(x, t)$ достаточно регулярная (в силу (1) достаточно, чтобы производная v'_x оставалась конечной), то частицы не могут догнать одна другую, о чем уже говорилось в § 1. Оказывается, если поле v имеет особенности, то такое сближение может быть столь активным, что задние частицы настигнут передние и в среде возникнет бесконечно малая по размерам порция конечной массы, т. е. дельтаобразной плотности. В силу формулы (1) такая ситуация возможна, только если $\partial v/\partial x$ обращается в бесконечность. Приведем простые примеры.

1. Пусть скорость v имеет скачок:

$$v \equiv v_0 > 0 \quad (x < 0), \qquad v \equiv 0 \quad (x > 0),$$

а начальная плотность ρ_0 постоянна. Тогда все частицы с отрицательной полуоси x «притискиваются» к началу координат и там остаются навечно. Соответствующая картина характеристик показана на рис. 32. Так как за время $t - t_0$ в начале координат сосредоточится масса $v_0 (t - t_0) \rho_0$, то искомая плотность среды

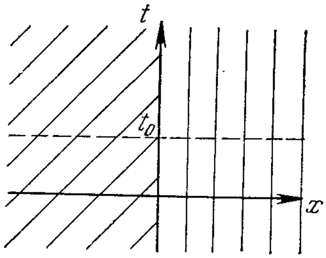

Рис. 32.

$$\rho(x, t) = \rho_0 + v_0 (t - t_0) \rho_0 \, \delta(x).$$

Аналогичное нарастающее уплотнение появляется в общем случае, если вдоль некоторой заданной мировой линии (т. е. линии в плоскости x, t) $x = \mu(t)$ выполняются соотношения

$$v(\mu(t) + 0, t) \leqslant \mu'(t) \leqslant v(\mu(t) - 0, t), \quad (2)$$

которые дают возможность найти независимо плотность $\rho(x, t)$ при $x > \mu(t)$ и при $x < \mu(t)$. Тогда за время dt на линии разрыва скорости оседает масса

$$(\rho_+ (\mu' - v_+) + \rho_- (v_- - \mu'))\, dt = (\mu' [\rho] - [\rho v])\, dt,$$

где обозначено $\rho_+ = \rho(\mu(t) + 0, t)$, $[\rho] = \rho_+ - \rho_-$ (т. е. скачок плотности) и т. п. Поэтому к найденной вне линии разрыва плотности надо добавить уплотнение с плотностью

$$\left(\int_{t_0}^{t} (\mu' [\rho] - [\rho v])\, dt \right) \delta(x - \mu(t)),$$

где t_0 — начальный момент образования уплотнения.

2. Уплотнение может образоваться и для непрерывного поля скоростей, если при приближении к некоторой характеристике поле направлений характеристик поворачивается ненормально быстро, точнее, если v'_x на этой характеристике обращается в бесконечность. (Ясно, что производная v'_x определяет скорость поворота поля характеристик в направлении, параллельном оси x.) Пусть, например, скорость

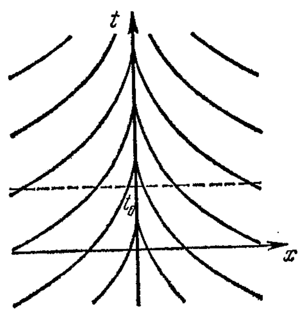

Рис. 33.

$$v = A |x|^{\alpha} \quad (x < 0), \qquad v = -A x^{\alpha} \quad (x > 0),$$

где $A>0$, а $0<\alpha<1$; соответствующая картина характеристик показана на рис. 33. Интегрирование уравнения $dx/dt=v(x)$ дает при начальном условии $x(t_1)=x_1>0$

$$x=\begin{cases}\{x_1^{1-\alpha}-A(1-\alpha)(t-t_1)\}^{\frac{1}{1-\alpha}} & \left(t\leqslant t_1+\dfrac{1}{A(1-\alpha)}x_1^{1-\alpha}\right),\\ 0 & \left(t\geqslant t_1+\dfrac{1}{4(1-\alpha)}x_1^{1-\alpha}\right)\end{cases}$$

(проверьте!). Допустим, что в начальный момент $t=t_0$ среда была однородной, т. е. $\rho_0(x)\equiv\rho_0$. Тогда в любой момент $t>t_0$ в точке $x=0$ сосредоточивается масса $2\rho_0\{A(1-\alpha)\ (t-t_0)\}^{1/(1-\alpha)}$; плотность при $x>0$ в силу формулы (8.2) равна

$$\rho(x,t)=\rho_0\cdot x^{-\alpha}\{x^{1-\alpha}+A(1-\alpha)(t-t_0)\}^{\alpha/(1-\alpha)}=$$
$$=\rho_0\{1+A(1-\alpha)(t-t_0)x^{-(1-\alpha)}\}^{\alpha/(1-\alpha}.$$

Суммарная формула для плотности:

$$\rho(x,t)=\rho_0\{1+A(1-\alpha)(t-t_0)|x|^{-(1-\alpha)}\}^{\alpha/(1-\alpha)}+$$
$$+2\rho_0\{A(1-\alpha)(t-t_0)\}^{1/(1-\alpha)}\delta(x).$$

Если частицы столь же активно расходятся друг с другом, то может возникнуть разрыв сплошности среды (*кавитация*), в результате которого в среде возникнут интервалы нулевой плотности. Рассмотрим, например, разрывное поле скоростей

$$v\equiv 0\quad (x<0),\qquad v\equiv v_0>0\quad (x>0)$$

при постоянной начальной плотности. Характеристики показаны на рис. 34, где точками покрыта зона кавитации. Плотность получается равной

$$\rho(x,t)=\begin{cases}\rho_0 & (-\infty<x<0,\\ & \quad v_0(t-t_0)<x<\infty),\\ 0 & (0<x<v_0(t-t_0)).\end{cases}$$

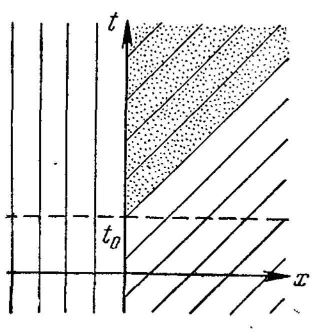

Рис. 34.

Возможен случай, когда частицы начинают расходиться из точки уплотнения среды. Так будет, например, на рис. 34, если $\rho_0(x)$ содержит дельта-слагаемое с особенностью при $x=0$. В других примерах такое «распыление» возможно и для начальной плотности, принимающей конечные значения; например, если условие (2) выполняется при значениях $t>t_0$, близких к t_0, однако при дальнейшем возрастании t это условие нарушается. В таких случаях требуется иметь дополнительные сведения о законе этого «распыления», так как в противном случае подсчитать однозначно закон эволюции среды невозможно. Мы не будем здесь останавливаться на том, как это делается.

В заключение отметим, что, как было видно из § 10, особенности поля скоростей в эйлеровых координатах могут получаться после перехода к этим координатам в поле скоростей, первоначально заданном в лагранжевых координатах и не имеющем в них особенностей. В настоящем параграфе поле и его особенности задаются с самого начала в эйлеровых координатах. Как видим, это привело к картине эволюции среды, качественно отличной от рассмотренной ранее.

Упражнения

1. Постройте закон изменения плотности среды, если $v=Ax^{\alpha}\ (x>0)$, $v=-A\,|x|^{\alpha}(x<0;\ A>0,\ 0<\alpha<1)$; $\rho_0(x)\equiv\rho_0$.
2. То же, если $v\equiv 0\ (x<0)$, $v\equiv v_0>0\ (x>0)$, $\rho_0(x)=m_0\delta(x)$ и из точки уплотнения за время dt выходят частицы общей массы $h\,dt$ ($h=\text{const}$).
3. Рассмотрите упражнение 2 для случая, когда речь идет не о массе, а о заряде частиц.

§ 13. Квазистационарные движения

В главе IV мы перейдем к задаче об исследовании эволюции среды, движущейся с заданными ускорениями; эта задача естественно появляется при применении 2-го закона Ньютона. Однако в ней имеются два важных вида движений, когда не только ускорения, но и скорости оказываются заданными, так что мы приходим к ситуации, рассмотренной в главе II. Эти виды движений мы изложим в §§ 13—14.

Один из этих видов образует квазистационарное движение. Вообще, движение называется *квазистационарным*, если инерционные силы для него пренебрежимо малы. Специфику этого условия легко понять уже при рассмотрении движения одной изолированной частицы.

Пусть частица массы m движется вдоль оси x под действием силы F, направленной вдоль той же оси. Тогда закон движения $x=x(t)$ частицы удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$m\ddot{x}=F \qquad \left(\cdot=\frac{d}{dt},\quad t\text{ — время}\right), \tag{1}$$

представляющему собой математическую запись 2-го закона Ньютона. Уравнение (1) имеет бесконечное количество частных решений, и чтобы получить одно вполне определенное решение, нужно к этому уравнению присоединить некоторые дополнительные условия — например, начальные условия

$$x\big|_{t=t_0}=x_0, \qquad \dot{x}\big|_{t=t_0}=v_0, \tag{2}$$