так как в противном случае подсчитать однозначно закон эволюции среды невозможно. Мы не будем здесь останавливаться на том, как это делается.

В заключение отметим, что, как было видно из § 10, особенности поля скоростей в эйлеровых координатах могут получаться после перехода к этим координатам в поле скоростей, первоначально заданном в лагранжевых координатах и не имеющем в них особенностей. В настоящем параграфе поле и его особенности задаются с самого начала в эйлеровых координатах. Как видим, это привело к картине эволюции среды, качественно отличной от рассмотренной ранее.

Упражнения

1. Постройте закон изменения плотности среды, если $v=Ax^{\alpha}\ (x>0)$, $v=-A\,|x|^{\alpha}(x<0;\ A>0,\ 0<\alpha<1)$; $\rho_0(x)\equiv\rho_0$.
2. То же, если $v\equiv 0\ (x<0)$, $v\equiv v_0>0\ (x>0)$, $\rho_0(x)=m_0\delta(x)$ и из точки уплотнения за время dt выходят частицы общей массы $h\,dt$ ($h=\mathrm{const}$).
3. Рассмотрите упражнение 2 для случая, когда речь идет не о массе, а о заряде частиц.

§ 13. Квазистационарные движения

В главе IV мы перейдем к задаче об исследовании эволюции среды, движущейся с заданными ускорениями; эта задача естественно появляется при применении 2-го закона Ньютона. Однако в ней имеются два важных вида движений, когда не только ускорения, но и скорости оказываются заданными, так что мы приходим к ситуации, рассмотренной в главе II. Эти виды движений мы изложим в §§ 13—14.

Один из этих видов образует квазистационарное движение. Вообще, движение называется *квазистационарным*, если инерционные силы для него пренебрежимо малы. Специфику этого условия легко понять уже при рассмотрении движения одной изолированной частицы.

Пусть частица массы m движется вдоль оси x под действием силы F, направленной вдоль той же оси. Тогда закон движения $x=x(t)$ частицы удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$m\ddot{x}=F \qquad \left(\cdot=\frac{d}{dt},\quad t\text{ — время}\right), \tag{1}$$

представляющему собой математическую запись 2-го закона Ньютона. Уравнение (1) имеет бесконечное количество частных решений, и чтобы получить одно вполне определенное решение, нужно к этому уравнению присоединить некоторые дополнительные условия — например, начальные условия

$$x\,\big|_{t=t_0}=x_0, \qquad \dot{x}\,\big|_{t=t_0}=v_0, \tag{2}$$

описывающие начальное положение и начальную скорость частицы, коротко говоря — начальное состояние частицы.

Допустим, что суммарная сила F, действующая на частицу, складывается из внешней (по отношению к частице) силы f_1, зависящей, например, от эйлеровой координаты x частицы и времени t, и силы трения $-\lambda\dot{x}$, пропорциональной скорости частицы. Тогда уравнение движения (1) можно переписать в виде

$$m\ddot{x}+\lambda\dot{x}=f_1(x,\ t). \tag{3}$$

Допустим, кроме того, что сила инерции значительно меньше силы трения:

$$m|\ddot{x}|\ll\lambda|\dot{x}|; \tag{4}$$

в данном примере это и есть условие квазистационарности движения. Тогда внешняя сила и сила трения должны почти полностью уравновеситься, т. е. от (3) можно перейти к уравнению $\lambda\dot{x}=f_1$; если же обозначить $f_1/\lambda=f$, то мы получим окончательно уравнение квазистационарного движения

$$\dot{x}=f(x,t). \tag{5}$$

Таким образом, скорость частицы оказалась заданной в эйлеровых координатах.

Условие (4) квазистационарности можно переписать в виде $mLT^{-2}\ll\lambda LT^{-1}$, т. е.

$$m\ll\lambda T, \tag{6}$$

где L — характерная длина, а T — характерное время в процессе движения (например, амплитуда и период, если рассматривается колебательное движение). Таким образом, из трех величин m, λ, T должны быть либо мала масса m, либо велик коэффициент трения λ, либо, наконец, велико характерное время T — если считать, что две прочие величины остаются конечными.

Для уравнения (5), как для уравнения 1-го порядка, начальное условие, взамен (2), должно иметь просто вид

$$x|_{t=t_0}=x_0; \tag{7}$$

значение $\dot{x}|_{t=t_0}$ может быть тогда найдено из самого уравнения (5):

$$\dot{x}|_{t=t_0}=f(x_0,\ t_0). \tag{8}$$

Если для квазистационарного движения частицы задать начальные условия (2) без учета условия согласования (8), то из-за малой инерционности скорость частицы за малое время релаксации τ примет с большой точностью значение (8). (*Релаксацией* называется процесс ликвидации того или иного рассогласования; здесь — скорости и координаты. Отметим, что вопрос об изменении начального условия при понижении порядка дифференциального уравнения затронут также в ЭПМ, § VIII.8, где рассмотрен пограничный слой, играющий для пространственной независимой переменной ту же роль, что релаксация — для временно́й.) Неравенство $\tau \ll T$, как и (4) или (6), можно считать условием квазистационарности движения. Так как эксперимент обычно включает в себя некоторую релаксацию, то за характерное время T в процессе эксперимента естественно принять наименьшее значение из времени существенного изменения сил и самого времени эксперимента. Тогда нарушение условия $\tau \ll T$ квазистационарности будет означать, что либо силы меняются слишком быстро, либо же эксперимент занимает слишком мало времени, и тогда процесс релаксации не успевает закончиться.

Аналогичным образом предположение о квазистационарности движения среды из частиц приводит к одной из двух постановок задач, указанных в § 1.

Упражнение

Рассмотрите уравнение *линейного осциллятора*

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0. \qquad (9)$$

Пусть условие квазистационарности состоит в том, чтобы сила инерции для решений вида $x = Ce^{pt}$ была по крайней мере в 10 раз меньше силы трения. Как записать это условие через параметры осциллятора? Пусть уравнение (9) решается при начальных условиях $x|_{t=0} = x_0$, $\dot{x}|_{t=0} = 0$; подсчитайте время релаксации τ, приняв за него время, через которое невязка (т. е. разность между левой и правой частями) в равенстве (8) понизится до 10%. Сравните τ с характерным временем $T = \lambda/k$.

§ 14. Движение частиц с заданной энергией

Другой вид движения, при котором зависимость скорости частицы от ее координаты можно считать известной, получается в случае, когда все частицы, образующие среду, обладают одинаковой полной энергией.

Рассмотрим сначала одиночную частицу массы m, движущуюся вдоль оси x под действием стационарного силового поля с потенциалом $U(x)$ без диссипации энергии. Если величина E полной энергии частицы известна, то на основании закона сохранения энергии можно написать

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = E, \qquad (1)$$

где первое слагаемое в левой части представляет собой кинетическую, а второе — потенциальную энергии системы.

Для рассматриваемого движения инерционные силы существенны, т. е. оно не укладывается в схему § 13. Однако баланс энергий (1) дает возможность выразить скорость v в виде известной функции