при понижении порядка дифференциального уравнения затронут также в ЭПМ, § VIII.8, где рассмотрен пограничный слой, играющий для пространственной независимой переменной ту же роль, что релаксация — для временно́й.) Неравенство $\tau \ll T$, как и (4) или (6), можно считать условием квазистационарности движения. Так как эксперимент обычно включает в себя некоторую релаксацию, то за характерное время T в процессе эксперимента естественно принять наименьшее значение из времени существенного изменения сил и самого времени эксперимента. Тогда нарушение условия $\tau \ll T$ квазистационарности будет означать, что либо силы меняются слишком быстро, либо же эксперимент занимает слишком мало времени, и тогда процесс релаксации не успевает закончиться.

Аналогичным образом предположение о квазистационарности движения среды из частиц приводит к одной из двух постановок задач, указанных в § 1.

Упражнение

Рассмотрите уравнение *линейного осциллятора*

$$m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0. \tag{9}$$

Пусть условие квазистационарности состоит в том, чтобы сила инерции для решений вида $x = Ce^{pt}$ была по крайней мере в 10 раз меньше силы трения. Как записать это условие через параметры осциллятора? Пусть уравнение (9) решается при начальных условиях $x|_{t=0} = x_0$, $\dot{x}|_{t=0} = 0$; подсчитайте время релаксации τ, приняв за него время, через которое невязка (т. е. разность между левой и правой частями) в равенстве (8) понизится до 10%. Сравните τ с характерным временем $T = \lambda/k$.

§ 14. Движение частиц с заданной энергией

Другой вид движения, при котором зависимость скорости частицы от ее координаты можно считать известной, получается в случае, когда все частицы, образующие среду, обладают одинаковой полной энергией.

Рассмотрим сначала одиночную частицу массы m, движущуюся вдоль оси x под действием стационарного силового поля с потенциалом $U(x)$ без диссипации энергии. Если величина E полной энергии частицы известна, то на основании закона сохранения энергии можно написать

$$\frac{mv^2}{2} + U(x) = E, \tag{1}$$

где первое слагаемое в левой части представляет собой кинетическую, а второе — потенциальную энергии системы.

Для рассматриваемого движения инерционные силы существенны, т. е. оно не укладывается в схему § 13. Однако баланс энергий (1) дает возможность выразить скорость v в виде известной функции координаты x:

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}, \qquad (2)$$

в результате чего получается ситуация, изучаемая в этой главе.

Из соотношения (2) (а впрочем, и из (1)) видно, что движение с заданным значением E возможно только в той части оси x, где $U(x) \leqslant E$. Допустим, что $U(\pm\infty) > E$; тогда эта часть оси состоит из одного или нескольких отрезков. Так, на рис. 35 это будет заштрихованный отрезок (a, b). Однако если бы и получилось несколько отрезков, то из-за невозможности перескоков через барьер движение каждой частицы все равно происходило бы только на одном из этих отрезков; поэтому такие отрезки можно исследовать независимо один от другого.

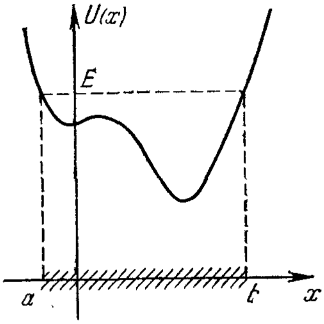

Рис. 35.

Движение частицы вдоль отрезка (a, b) возможно в любом из двух направлений, что соответствует двум знакам перед радикалом в правой части (2). Рассмотрим, например, движение направо. Закон этого движения получается, как в § 8, с помощью разделения переменных:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]},$$

откуда

$$\sqrt{\frac{m}{2}} \int\limits_{x_0}^{x} \frac{ds}{\sqrt{E - U(s)}} = t - t_0. \qquad (3)$$

Так как $U(b) = E$, то когда частица приближается к точке b, подынтегральная функция на верхнем пределе стремится к бесконечности, т. е. интеграл в формуле (3) становится несобственным. Но если $U'(b) \neq 0$, как на рис. 35, то при $s \approx b$ будет $U(s) \approx E + U'(b) \times \times (s - b)$, т. е. подынтегральная функция на верхнем пределе имеет порядок $1/\sqrt{b - s}$, а значит, интеграл (3) при $x = b$ — сходящийся и имеет конечное значение. Таким образом, частица попадет в точку b за конечное время, после чего станет двигаться налево.

Подчеркнем, что в точке $x = b$ скорость частицы равна нулю, т. е. это точка мгновенной остановки; при этом ускорение отлично от нуля и по 2-му закону Ньютона равно $-\frac{1}{m}U'(b)$. Этим ускорением и вызывается возобновление движения немедленно после остановки.

Движение налево является как бы зеркальным отражением движения направо, так как в одинаковых точках скорости по модулю равны, но противоположны по направлению. Если $U'(a) \neq 0$, то частица за конечное время попадает в точку a, после чего «все опять повторится сначала». Таким образом, частица будет совершать периодические колебания, период которых, в силу формулы (3), равен

$$2\sqrt{\frac{m}{2}}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}.$$

Например, линейный осциллятор имеет потенциал $U(x) = \frac{k}{2}x^2$, где k — *коэффициент восстановления*. Так как в этом случае потенциал — функция четная, то интервал колебания будет симметричным относительно начала координат, т. е. $a = -b$. Мы предоставляем читателю подсчитать, что период колебаний линейного осциллятора равен $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ и тем самым не зависит от амплитуды b; в этом смысле линейный осциллятор является исключением.

Перейдем теперь к случаю, когда на отрезке (a, b) расположена среда из невзаимодействующих частиц, причем под E и $U(x)$ будем теперь понимать *приведенные* значения энергий, т. е. значения энергии, отнесенные к единице массы; другими словами, «настоящие» значения энергии частицы получатся, если умножить приведенные величины на массу частицы. Тогда закон сохранения энергии примет вид

$$\frac{v^2}{2} + U(x) = E,$$

а формула для периода колебаний — вид

$$T = \sqrt{2}\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}. \tag{4}$$

Мы предположим, что все частицы обладают одинаковой полной энергией (точнее, разброс частиц по энергии пренебрежимо мал). Тогда каждая из частиц будет совершать периодические колебания с одним и тем же периодом (4), а потому и во всей среде, рассматриваемой в целом, будет происходить периодический процесс с тем же периодом; другими словами, любое начальное распределение частиц, идущих вперед и идущих назад, через время T в точности воспроизводится. Законы движения отдельных частиц, отвечающие потенциалу рис. 35, показаны на рис. 36; все эти законы получаются один из другого простым сдвигом во времени.

Пусть известны начальные плотности $\rho_{0+}(\xi)$ и $\rho_{0-}(\xi)$ частиц, идущих в положительном и соответственно отрицательном направлениях оси x, а нас интересуют эти плотности $\rho_+(x, t)$ и $\rho_-(x, t)$ в любой момент t. Тогда, чтобы не возникало сложностей с отражениями частиц от концов отрезка (a, b), можно применить следующий искусственный прием: принять, что когда частица достигает конца, она уходит из отрезка, но через этот конец в отрезок входит другая такая же частица с тем же приведенным значением полной энергии E. Поэтому продолжим потенциал $U(x)$, а с ним функции $v_+(x)$ и

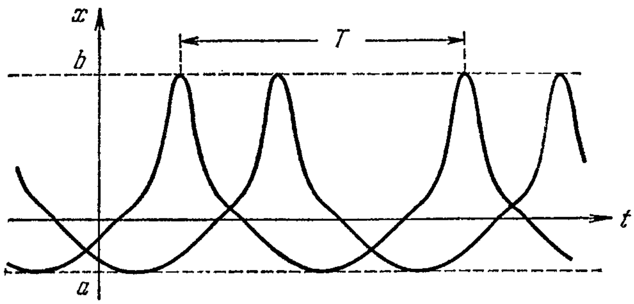

Рис. 36.

$v_-(x) = -v_+(x)$, определенные формулой (2) с $m=1$, четным образом через точки a и b, что приведет к $2(b-a)$-периодическим функциям *), и будем считать, что движение частиц в обе стороны происходит на всей оси x. (На рис. 37 показан продолженный потенциал

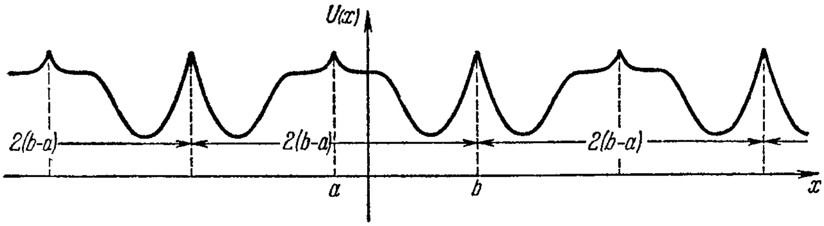

Рис. 37.

рис. 35, а на рис. 38 показаны законы движения частиц: 11 — до продолжения, 22 и 33 — после продолжения). Начальные распределения плотностей надо продолжить так: $\rho_{0+}(\xi)$ $(\rho_{0-}(\xi))$ при переходе через точки a и b строится как четное продолжение функции $\rho_{0-}(\xi)$ (соответственно $\rho_{0+}(\xi)$); при этом также получатся $2(b-a)$-периодические функции x. (Продумайте, почему получилось такое правило продолжения.)

После продолжения рассматриваемых функций на всю ось можно воспользоваться результатами § 8 (см. формулы (8.2) и (8.3)),

*) Выражение «A-периодическая функция» при любом A означает «периодическая функция с периодом A».

что даст

$$\rho_+(x, t) = \frac{v_+(\xi_+(x, t))}{v_+(x)}\rho_{0+}(\xi_+(x, t)), \tag{5}$$

где

$$\xi_+(x, t) = \zeta_+(w_+(x) - t + t_0), \qquad w_+(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{ds}{v_+(s)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{x_0}^{x}\frac{ds}{\sqrt{E - U(s)}},$$

а функция ζ_+ — обратная к $w_+(x)$. Так как можно принять $w_-(x) \equiv -w_+(x)$ и потому $\zeta_-(t) \equiv \zeta_+(-t)$, то

$$\rho_-(x, t) = \frac{v_-(\xi_-(x, t))}{v_-(x)}\rho_{0-}(\xi_-(x, t)) = \frac{v_+(\xi_-(x, t))}{v_+(x)}\rho_{0-}(\xi_-(x, t)), \tag{6}$$

где

$$\xi_-(x, t) = \zeta_-(w_-(x) - t + t_0) = \zeta_+(w_+(x) + t - t_0).$$

Окончательный ответ достаточно рассматривать на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ (однако функции $v_{0\pm}$, $\rho_{0\pm}$, $w_\pm$ и $\zeta_\pm$ все равно надо считать продолженными, так как в противном случае полученные формулы для $\xi_\pm$ и $\rho_\pm$ потеряют смысл из-за возможности произвольного изменения t!), причем обычно фактически наблюдается суммарный поток с плотностью

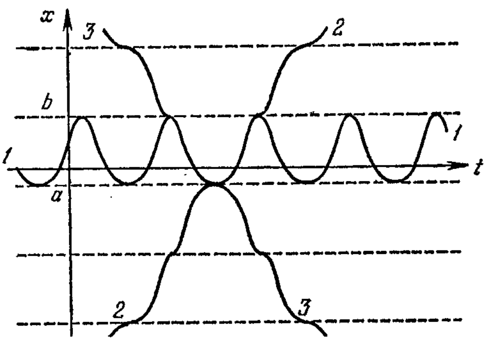

Рис. 38.

$$\rho(x, t) = \rho_+(x, t) + \rho_-(x, t).$$

Отметим, что, как видно из формул (5) и (6), на концах a и b отрезка, где на самом-то деле происходит поворот потока, скорость спадает до нуля, и потому плотность становится бесконечной.

Рассмотрим в качестве примера линейный осциллятор, т. е. положим $U(x) = \frac{k}{2}x^2$ и примем для простоты $\rho_{0\pm}(x) \equiv \rho_0 = \text{const}$. Тогда при заданном приведенном значении полной энергии E колебание будет происходить на интервале $-b \leqslant x \leqslant b$, где $b = \sqrt{\frac{2E}{k}}$. На этом интервале

$$v_+(x) = \sqrt{2(E - U(x))} = \sqrt{2E - kx^2},$$

$$w_+(x) = \int_0^x \frac{dx}{v_+(x)} = \frac{1}{\sqrt{k}}\arcsin\sqrt{\frac{k}{2E}}\,x = \frac{1}{\sqrt{k}}\arcsin\frac{x}{b}.$$

Теперь надо функцию $v_+(x)$ продолжить четным образом через точки $x = \pm b$ на всю ось x; результат этого продолжения показан на рис. 39, это $2b$-периодическая функция. После этого функцию $w_+(x)$ также продолжаем по формуле $w_+(x)=\int\limits_0^x \frac{dx}{v_+(x)}$; в результате получится сумма $2b$-периодической и линейной функций, так что при любом x приращению $\Delta x = 2b$ отвечает $\Delta w_+ = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ (рис. 39). Поэтому обратная к $w_+(x)$ функция $\zeta_+(t)$, показанная на рис. 40, также обладает аналогичным свойством: на интервале $-\frac{\pi}{2\sqrt{k}} \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2\sqrt{k}}$ она равна $\zeta_+(t) = b\sin\sqrt{k}t$, а при любом t приращению $\Delta t = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$ отвечает $\Delta\zeta_+ = 2b$. По формуле (5) получаем при $-b \leqslant x \leqslant b$

$$\rho_+(x, t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{2E-kx^2}}\, v_+\left(\zeta_+\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\arcsin\frac{x}{b} - t + t_0\right)\right),$$

где функции v_+, ζ_+ были определены выше. Мы предоставляем читателю найти аналогичное выражение для $\rho_-(k, t)$.

Полученное выражение для $\rho_+(x, t)$ допускает упрощение, связанное со специальным видом участвующих в данном примере зависимостей. Заметим, что $\zeta_+(t)$ при любом t отличается от $b\sin\sqrt{k}t$ на некоторое целое кратное величины $2b$. Но эта величина служит периодом функции $v_+(x)$, поэтому добавление ее под знаком функции v_+ несущественно, и мы получаем

$$\rho_+(x, t) = \frac{\rho_0}{\sqrt{2E-kx^2}}\, v_+\left(b\sin\sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\arcsin\frac{x}{b} - t + t_0\right)\right) =$$

$$= \frac{\rho_0}{\sqrt{2E-kx^2}}\sqrt{2E - kb^2\sin^2\left(\arcsin\frac{x}{b} - \sqrt{k}(t-t_0)\right)} =$$

$$= \frac{\rho_0 b}{\sqrt{b^2-x^2}}\left|\cos\left(\arcsin\frac{x}{b} - \sqrt{k}(t-t_0)\right)\right|.$$

Выражение для $\rho_-(x, t)$ получится, если перед $\sqrt{k}$ поменять — на +.

Для потенциала $U(x)$ общего вида одним из возможных распределений плотности является стационарное. В силу формулы (8.1) оно имеет вид

$$\rho_\pm(x) = \frac{C}{|v(x)|} = \frac{C}{\sqrt{2(E-U(x))}}, \tag{7}$$

где постоянная C определяется общей массой M осциллирующей среды:

$$M = 2\int\limits_a^b \rho_+(x)\,dx = \sqrt{2}C\int\limits_a^b \frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}. \tag{8}$$

Интересно, что так как при этом через каждую точку проходят встречные потоки равной интенсивности и равной по модулю скорости, то суммарный импульс порции частиц, расположенных на любом интервале оси x, равен нулю. Однако суммарная кинетическая энергия D положительна:

$$D=2\int_a^b \frac{1}{2}\rho v^2\,dx=\frac{2C}{m}\int_a^b \sqrt{E-U(x)}\,dx.$$

Мы уже упоминали в § I.6, что в этих условиях можно пользоваться понятием давления среды $p=\rho v^2$, где $\rho=\rho_+ + \rho_- = 2\rho_+$ —

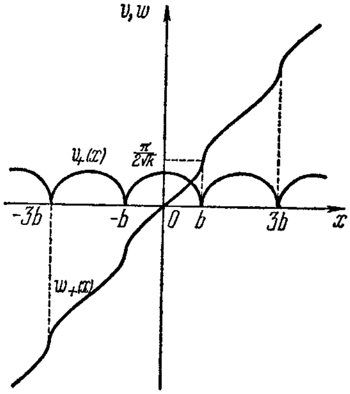

Рис. 39.

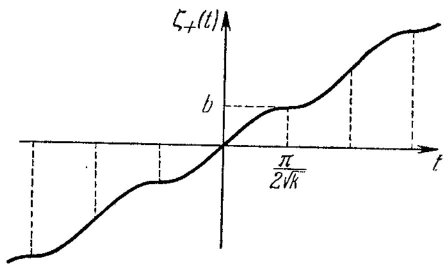

Рис. 40.

суммарная плотность. Более подробно понятие давления будет обсуждаться в гл. V в связи с рассмотрением случайных, хаотических движений частиц.

Вернемся к общему (вообще говоря, нестационарному) распределению плотностей и посмотрим, что получится в результате *осреднения* этого распределения по времени. Напомним, что если произвольная функция $f(s)$ задана на каком-либо конечном интервале $(\alpha,\ \beta)$, то ее средним значением по этому интервалу называется

$$\bar{f}=\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(s)\,ds;$$

$\bar{f}$ — это такая постоянная, интеграл от которой по интервалу $(a,\ b)$ равен интегралу от функции $f(s)$ по этому интервалу. Средним значением функции $f(s)$ на интервале $(-\infty,\ \infty)$ называется предел

$$\bar{f}=\bar{f}^{(-\infty,\ \infty)}=\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to\infty}}\bar{f}^{(\alpha,\ \beta)}=\lim_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to\infty}}\frac{1}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(s)\,ds.$$

(При этом в правой части нельзя написать просто $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s)ds$, так как для рассматриваемых функций этот интеграл, как правило, будет расходиться; если интеграл сходится, то среднее $\overline{f}$ обязательно равно нулю!) Среднее значение по бесконечному интервалу существует далеко не у всякой функции, однако нетрудно указать важные классы функций, для которых такое среднее все-таки существует. Так, если $f(s)$ при $s \to \pm\infty$ имеет конечный предел k, то $\overline{f}=k$. Более важен для нас сейчас класс периодических функций: легко понять, что если функция $f(s)$ T-периодична, то

$$\overline{f} = \frac{1}{T} \int\limits_{\alpha}^{\alpha+T} f(s)\, ds,$$

т. е. среднее по всей оси равно среднему по периоду (последний интеграл, очевидно, не зависит от выбора α).

Вооружившись этими простыми сведениями, проинтегрируем обе части уравнения неразрывности (7.1) по t от α до β, где α и β пока произвольны, и разделим результат на $\beta - \alpha$. Мы получим:

$$\left(\frac{1}{\beta-\alpha}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho v\, dt\right)'_x + \frac{1}{\beta-\alpha}\left[(\rho v)|_{t=\beta} - (\rho v)|_{t=\alpha}\right] = 0; \tag{9}$$

при этом мы поменяли в первом члене порядок дифференцирования и интегрирования, так как они производятся по разным независимым переменным и потому x для интеграла играет роль параметра. Если теперь считать, что $\alpha \to -\infty$, $\beta \to \infty$, то второй член в равенстве (9) стремится к нулю (почему?), и вспомнив, что величина ρ обладает свойством T-периодичности по t, а величина v не зависит от t, мы получим в пределе

$$(\overline{\rho v})'_x \equiv (\overline{\rho}(x)\, v(x))'_x = 0.$$

(Заметим, что осредненная величина $\overline{\rho}$ не может зависеть от переменной t, по которой производится осреднение, но, конечно, может зависеть от переменной x, которая при этом осреднении служит параметром.) Другими словами, плотность, осредненная по времени, служит *стационарным* решением уравнения неразрывности и потому определяется формулой (7).

Рассмотрим еще один тип осреднения по времени, а именно: вдоль по движению частицы. Пусть рассматривается некоторая функция $\Phi(x)$ от положения частицы, тогда при подстановке выражения $x=\varphi(t)$ в силу закона движения частицы эта функция становится

T-периодической функцией времени со средним значением

$$\overline{\Phi(x(t))}=\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T}\Phi(x(t))\,dt.$$

Оказывается, что это среднее можно выразить через среднее по другой переменной, связанной с заданным стационарным потоком, имеющим плотность $\rho(x)$; речь идет о переменной $m=2\int_a^x\rho(x)dx$, т. е. о массе, содержащейся в стационарном потоке между точками a и x. (Отметим, что из-за наличия двух встречных движений переменную m нельзя принять за лагранжеву координату, как в конце § I.3.) В самом деле, если перейти сначала к интегрированию по x, мы получим

$$\frac{1}{T}\,2\int_a^b\Phi(x)\frac{dt}{dx}\,dx=\frac{2}{T}\int_a^b\Phi(x)\frac{dx}{v(x)}=\frac{2}{T}\int_a^b\Phi(x)\frac{\rho(x)}{C}\,dx.$$

Подставив сюда выражение для T из (4) и C из (8), получим

$$2\left(\sqrt{2}\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}\right)^{-1}\sqrt{2}\int_a^b\frac{dx}{\sqrt{E-U(x)}}\,M^{-1}\int_a^b\Phi(x)\,\rho(x)\,dx=$$
$$=2\int_a^b\Phi(x)\,\rho(x)\,dx/M.$$

Однако правую часть можно переписать в виде $\int\Phi\,dm/M$, где интегрирование проводится по всему ансамблю частиц; а это и есть среднее значение. Итак,

$$\overline{\Phi(x(t))}=\overline{\Phi(m)}. \tag{10}$$

Этот результат — равенство временно́го и пространственного средних — представляет собой простейшее проявление свойства *эргодичности*, о котором мы будем говорить в § IV.11. Он может быть применен как для предсказания значения временно́го среднего, если вычислить пространственное среднее легче, так и для приближенного определения пространственного среднего с помощью наблюдения за отдельной частицей. При этом в качестве приближенного значения для временно́го среднего любой величины можно взять среднее арифметическое из наблюденных ее значений в случайно выбранные моменты на протяжении достаточно длительного интервала времени.

Подчеркнем еще, что в правой части формулы (10) интегрирование идет не по dx (это было бы неверно!), а по $dm\sim\rho dx$; другими словами, это *интеграл по мере* m (такие интегралы упоминались в ЭПМ, § VI.4). Преимуществом этой меры оказывается то, что в данной задаче, в отличие от длины, она является *инвариантной*, т. е. мера каждого участка среды в процессе движения не меняется. Отметим попутно, что осреднение по $\rho^2 dx$ или вообще по $g(\rho)\,dx$, где $g(\rho)$ — какая угодно функция, для которой $g(\rho)/\rho \neq \text{const}$, также не привело бы к правильному результату (10).

Приведем простой пример. Пусть рассматривается линейный осциллятор, т. е. $U(x)=\frac{k}{2}x^2$, а $\Phi(x)=x^2$; вычислим средние, о которых здесь идет речь. Если E — приведенное значение полной энергии, то колебание происходит по закону $x=b\sin(\sqrt{k}t+\varphi_0)$, где $b=\sqrt{\frac{2E}{k}}$, а φ_0 — произвольная начальная фаза. Значит, среднее по времени равно

$$\overline{\Phi(x(t))}=\frac{\sqrt{k}}{2\pi}\int\limits_{-\pi/\sqrt{k}}^{\pi/\sqrt{k}}(b\sin(\sqrt{k}t+\varphi_0))^2dt=\frac{\sqrt{k}}{2\pi}b^2\frac{\pi}{\sqrt{k}}=\frac{b^2}{2}.$$

С другой стороны, так как стационарным распределением плотности в данном примере будет

$$\rho(x)=\frac{C}{\sqrt{2E-kx^2}}=\frac{c_1}{\sqrt{b^2-x^2}},\quad \text{т. е.}\quad dm=\frac{c_1}{\sqrt{b^2-x^2}}\,dx_1,$$

то среднее по мере m равно

$$\overline{\Phi(x)}^m=\int\limits_{-b}^{b}x^2\frac{dx}{\sqrt{b^2-x^2}}:\int\limits_{-b}^{b}\frac{dx}{\sqrt{b^2-x^2}}=\frac{\pi b^2}{2}:\pi=\frac{b^2}{2}$$

(вычисление интегралов мы предоставляем читателю). Среднее же от функции $\Phi(x)$ по координате x равно

$$\overline{\Phi(x)}^x=\frac{1}{2b}\int\limits_{-b}^{b}x^2\,dx=\frac{b^2}{3}.$$

Мы видим, что временно́е среднее равно среднему по мере m, как это и должно быть, и отлично от среднего по координате x.

Рассмотрим важный частный случай: пусть $\Phi(x)$ представляет собой *характеристическую функцию* некоторого интервала (c, d), т. е. $\Phi(x)=1$ на (c, d) и $=0$ вне (c, d) $(a\leqslant c<d\leqslant b)$. Тогда $\overline{\Phi(x(t))}$ равно средней доле времени пребывания частицы $x(t)$ в интервале (c, d) (по отношению ко всему времени), и из формулы (10) мы получаем, что эта средняя доля равна приходящейся на интервал (c, d) доле массы всех частиц. Впрочем, это свойство легко непосредствен-

но вывести из формулы $\rho v=c$ ($\rho\, dx\sim \frac{dx}{v}=dt$ и т. д.), а из него уже вывести общую формулу (10), так как любую функцию $\Phi(x)$ можно с любой степенью точности представить в виде линейной комбинации характеристических функций (продумайте это!).

Статистический подход, основанный на осреднении, позволяет по-новому подойти к общему понятию среды из частиц. Рассмотрим для простоты стационарное движение среды. Строго говоря, пока мы рассматриваем движение частиц, картина всегда является нестационарной, она может только более или менее напоминать стационарную. В частности, если выбрать интервал длины Δx на оси x, то число частиц $(\Delta N)_t$, находящихся на этом интервале в момент t, вообще говоря, зависит от t. Однако когда мы производим осреднение по времени, т. е. полагаем $\overline{\Delta N}=\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{t_0+T}(\Delta N)_t\,dt$, где t_0 произвольно, а T достаточно велико, то мы переходим к полностью стационарной картине, так как $\overline{\Delta N}$ уже не зависит от времени. Осредненное значение $\overline{\Delta N}$ уже не будет, как $(\Delta N)_t$, принимать целые значения; более того, может быть $0<\overline{\Delta N}<1$. Например, равенство $\overline{\Delta N}=\frac{1}{2}$ может означать, что время, на протяжении которого на рассматриваемом интервале Δx имеется одна частица, приблизительно равно времени, на протяжении которого там частиц нет. Таким образом, $\overline{\Delta N}$ становится непрерывной величиной, т. е. мы, по существу, переходим к среде. В формуле $n=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\overline{\Delta N}}{\Delta x}$ значение Δx, в отличие от § I.2, может быть произвольно малым, оно не связано со средним расстоянием между частицами.

Для нестационарной картины аналогичный результат можно получить с помощью осреднения в фиксированный момент времени по большому числу экземпляров исследуемой системы со случайным начальным положением частиц.

Сделаем в заключение еще несколько общих замечаний. В статистической механике совокупность одинаковых систем, имеющих к тому же строго одинаковую энергию, называют *микроканоническим ансамблем*. Предполагается, что каждая система движется под влиянием внутренних взаимодействий и постоянных внешних сил, имеющих потенциал. Это условие нужно для того, чтобы и во время движения энергия сохранялась, ансамбль оставался микроканоническим.

Противоположное понятие есть *макроканонический ансамбль*: в нем системы подвергаются случайным внешним силам, при которых их энергия то увеличивается, то уменьшается. Поэтому в каждый момент имеются системы с различной энергией, есть, как говорят, определенное распределение систем по энергии. Важный частный случай макроканонического ансамбля представляют собой системы, находящиеся во взаимодействии с телом определенной температуры T. Случайные силы, действующие на систему, в этом случае зависят от теплового движения атомов и молекул, составляющих тело. Тогда, как доказывается в статистической механике, получается вполне определенное распределение систем по энергии: вероятность системе иметь ту или иную энергию пропорциональна $e^{-E/kt}$, где k — знаменитая постоянная Больцмана, равная $1{,}38\cdot 10^{-16}$ *эрг/градус*, T — температура в градусах Кельвина (т. е. по абсолютной шкале). Замечательно, что это распределение не зависит от силы взаимодействия между системой и телом, оно универсально.

Вернемся к рассмотренной выше задаче о движении одиночной частицы. В этом случае системой можно назвать одну частицу, движущуюся по заданной прямой в заданном потенциальном поле сил. Совокупность частиц с заданной одинаковой энергией можно назвать микроканоническим ансамблем. Отличие одной системы от другой заключается в различном значении координаты и направления *) скорости в заданный момент t_0. Существует равновесный (стационарный) микроканонический ансамбль. Так называется совокупность систем, не изменяющаяся с течением времени — хотя каждая система в отдельности движется и изменяется! В равновесном ансамбле в начальный момент число систем (частиц) в данном малом интервале от x до $x+\Delta x$ равно $A\dfrac{\Delta x}{|v(x)|}$, где A — константа, $v(x)$ — скорость в данной точке. Число частиц, движущихся вправо и влево, одинаково. Константа A пропорциональна полному числу N частиц в ансамбле, $N = A\displaystyle\int\frac{dx}{|v(x)|}$. Легко проверить, что такой ансамбль стационарен: одинаково число частиц, покидающих любой интервал и приходящих в него за единицу времени.

В данном простейшем случае системы с одной только частицей и одной координатой нестационарный ансамбль остается нестационарным, не превращается в стационарный. В самом деле, пусть при $t=t_0$ весь ансамбль, все частицы сконцентрированы на малом отрезке Δx, как говорят, в виде *пакета* и движутся в одну и ту же сторону, например, вправо. Энергия всех частиц одинакова, значит, одинаков и период T полного колебания. Ровно через период весь пакет окажется на том же месте, пакет не расплывается!

В § IV.11 мы увидим, что такое поведение пакета есть исключение из общего правила, связанное с тем, что система слишком уж проста, обладает всего одной степенью свободы. Система из невзаимодействующих частиц с одинаковой полной энергией, движущихся

*) Величина скорости для частицы с данной координатой имеет определенное значение, поскольку задана энергия.

в потенциальном силовом поле, не дает ничего нового, так как она, по существу, распадается на одинаковые системы с одной степенью свободы. И лишь если частицы взаимодействуют или обладают более чем одной степенью свободы (например, движутся не по линии, а по заданной поверхности или вообще без связей), то получается более сложная система с несколькими неразделяющимися координатами, для которой с течением времени ансамбль становится все более похож на стационарный.

Аналогичная ситуация возникает для ансамбля невзаимодействующих частиц с одной степенью свободы, если частицы как-то распределены по энергии, скажем, в интервале от E до $E+\Delta E$ (сделан один шаг от микроканонического ансамбля к макроканоническому). Частицы различных энергий имеют различные периоды. После нескольких колебаний частицы разных энергий окажутся в различных местах, с течением времени пакет расплывается, ансамбль приблизится к стационарному.

Поучителен случай гармонического осциллятора: если $U(x)=\frac{kx^2}{2}$, то период колебаний не зависит от энергии. Даже «пакет» с различными энергиями не расплывается! Казалось бы, мы упростили задачу: гармонический осциллятор имеет самый простой вид потенциала. Но при этом упрощении потерялось важнейшее свойство ансамбля — приближение к стационарному, равновесному состоянию. Очень характерно, что статистические свойства ансамблей суть свойства сложных систем, которые часто теряются при переходе к упрощенным системам.

К процессу размазывания «пакета» мы вернемся в § IV.11.

Упражнения

1. Напишите решение задачи Коши для распределения плотности в случае осциллятора с потенциалом $U(x)=\begin{cases}\infty & (x<0),\\ gx & (x>0),\end{cases}$ отвечающим движению невзаимодействующих частиц в атмосфере.

2. Выразите стационарное решение для линейного осциллятора через массу M осциллирующей среды.

§ 15. Движение электронов в собственном поле

Имеется интересный класс задач, в которых поле потенциальной энергии, воздействующее на частицы и формирующее плотность среды, оказывается взаимосвязанным с самой этой плотностью. В этом случае само построение потенциала требует решения дифференциального уравнения.

В качестве примера мы рассмотрим задачу о движении электронов в вакууме с учетом создаваемого ими электрического поля. Здесь получается самосогласованная задача о движении в таком поле, которое в свою очередь зависит от движения электронов. По су-