

в потенциальном силовом поле, не дает ничего нового, так как она, по существу, распадается на одинаковые системы с одной степенью свободы. И лишь если частицы взаимодействуют или обладают более чем одной степенью свободы (например, движутся не по линии, а по заданной поверхности или вообще без связей), то получается более сложная система с несколькими неразделяющимися координатами, для которой с течением времени ансамбль становится все более похож на стационарный.

Аналогичная ситуация возникает для ансамбля невзаимодействующих частиц с одной степенью свободы, если частицы как-то распределены по энергии, скажем, в интервале от  $E$  до  $E + \Delta E$  (сделан один шаг от микроканонического ансамбля к макроканоническому). Частицы различных энергий имеют различные периоды. После нескольких колебаний частицы разных энергий окажутся в различных местах, с течением времени пакет расплывается, ансамбль приблизится к стационарному.

Поучителен случай гармонического осциллятора: если  $U(x) = \frac{kx^2}{2}$ , то период колебаний не зависит от энергии. Даже «пакет» с различными энергиями не расплывается! Казалось бы, мы упростили задачу: гармонический осциллятор имеет самый простой вид потенциала. Но при этом упрощении потерялось важнейшее свойство ансамбля — приближение к стационарному, равновесному состоянию. Очень характерно, что статистические свойства ансамблей суть свойства сложных систем, которые часто теряются при переходе к упрощенным системам.

К процессу размазывания «пакета» мы вернемся в § IV.11.

### Упражнения

1. Напишите решение задачи Коши для распределения плотности в случае осциллятора с потенциалом  $U(x) = \begin{cases} \infty & (x < 0), \\ gx & (x > 0), \end{cases}$  отвечающим движению невзаимодействующих частиц в атмосфере.

2. Выразите стационарное решение для линейного осциллятора через массу  $M$  осциллирующей среды.

## § 15. Движение электронов в собственном поле

Имеется интересный класс задач, в которых поле потенциальной энергии, воздействующее на частицы и формирующее плотность среды, оказывается взаимосвязанным с самой этой плотностью. В этом случае само построение потенциала требует решения дифференциального уравнения.

В качестве примера мы рассмотрим задачу о движении электронов в вакууме с учетом создаваемого ими электрического поля. Здесь получается самосогласованная задача о движении в таком поле, которое в свою очередь зависит от движения электронов. По су-

шеству, это значит, что рассматривается взаимодействие между электронами: электрон № 1 участвует в создании поля, в котором движется электрон № 2, значит, учитывается взаимодействие электронов № 1 и № 2.

Может показаться, что эта задача не относится к теме нашей книги, посвященной движению невзаимодействующих частиц. Однако специфика рассматриваемой задачи заключается в том, что в объеме между катодом и анодом электронов много; поэтому можно найти усредненное поле, соответствующее усредненному распределению заряда. Так, например, около каждого индивидуального электрона абсолютная величина поля растет пропорционально  $1/r^2$ ; среднее поле, которое мы рассматриваем, является гладким, особенности типа  $1/r^2$  в нем не учитываются. Эти особенности исчезают при усреднении, так как вблизи электрона встречаются сильные поля всех направлений.

Задача о движении электронов в усредненном поле всех электронов, хотя и учитывает взаимодействие частиц, но по характеру и по способам решения очень похожа на задачи о движении в заданном внешнем поле (без взаимодействия частиц). Поэтому ее рассмотрение здесь вполне уместно.

Эта задача важна для теории вакуумных электронных приборов — катодных ламп: выпрямителей (диодов) и усилителей (с сетками — триоды и более сложные). В течение длительного периода, до появления полупроводниковых транзисторов, вся радиотехника основывалась на вакуумных приборах. Отметим, впрочем, что в транзисторах происходят явления того же типа, что в вакууме, но имеющие более сложный характер. Мы не будем их здесь рассматривать.

Катод электронного прибора нагревается до высокой температуры; при этом под действием теплового движения появляются электроны с энергией, достаточной для того, чтобы вырваться из металла в пустоту. Энергия этих электронов порядка нескольких электрон-вольт, однако непосредственно после того, как они покинут катод, у них остается энергия порядка десятых электрон-вольта, т. е.  $2 \div 5 \cdot 10^{-13}$  эрг.

Если электрическое поле в вакууме направлено так, что оно ускоряет электроны, то ни один из электронов, вылетающих с поверхности, не возвращается. В таком случае, сила тока просто выражается произведением заряда одного электрона на число электронов, испаряющихся с поверхности в единицу времени (*ток насыщения*). При этом ток зависит от температуры катода, но не зависит от разности потенциалов катода и анода.

Если поле в вакууме замедляет электроны, то часть из них или все они возвращаются обратно и снова поглощаются катодом. При этом нужно различать два случая: будет ли анод заряжен отрицательно или положительно по отношению к катоду.

В первом случае, даже в отсутствии электронов в вакууме, поле стремится возвратиться электроны. Ток практически равен нулю, когда отрицательное напряжение анода будет больше средней энергии испаряющихся электронов, т. е. больше, примерно, 1 вольта. В этих условиях в вакууме почти нет электронов (кроме самого близкого к катоду слоя), и нет нужды уточнять расчет учетом влияния электронов на поле.

Второй случай, который рассмотрен ниже, более сложен. Здесь анод заряжен положительно, и если бы не взаимодействие электронов, вакуумное поле было бы таким, что все испаряющиеся электроны попали на анод. Однако при этом их число в объеме было бы слишком большим, и потому с учетом их заряда возникнет противодействующее поле. В этом случае установится режим, при котором лишь часть испаряющихся электронов достигает анода, тогда как остальные возвращаются на катод.

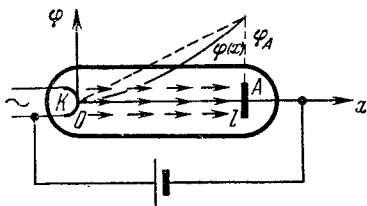


Рис. 41.

Задача и состоит в том, чтобы найти эту часть. При этом поле на поверхности катода должно обратиться в нуль, так как здесь и в дальнейшем мы пренебрегаем тепловой энергией испаряющихся электронов. Говорят об *эмиссии* (испускании) электронов в режиме, лимитированном объемным зарядом, так как обращение в нуль поля, т. е. суммы вакуумного поля и поля электронов, накладывает условие на объемный заряд электронов.

Итак, пусть частицы — электроны вылетают с катода  $K$  и, разгоняясь действующим на них полем, попадают на анод  $A$  (рис. 41). Найдем закон распределения частиц, учитывая воздействие на них поля, которое будем считать заданным.

Расположим ось  $x$  от  $K$  и  $A$  с началом координат в  $K$  и примем потенциал катода равным нулю. Закон сохранения энергии, примененный к отдельной частице, имеет вид

$$E = m \frac{v^2}{2} - e\varphi(x) = \text{const}^*), \quad (1)$$

где под  $m$  и  $-e$  понимается масса и заряд частицы,  $v = dx/dt$ , а через  $\varphi(x)$  обозначен потенциал в точке  $x$  ( $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(l) = \varphi_A$ , где  $l$  — абсцисса точки  $A$ ). Подстановка в (1) значения  $x=0$  показывает, что  $E=0$ , откуда

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m} \varphi(x)}. \quad (2)$$

\*) Отметим, что здесь надо считать размерности  $[e] = [m]^{1/2} [l]^{3/2} [t]^{-1}$ , и потому  $[\varphi] = [m]^{1/2} [l]^{1/2} [t]^{-1}$ ,  $[\rho] = [m]^{1/2} [l]^{-3/2} [t]^{-1}$  и т. д.

Отметим при этом, что рассматриваемый процесс может проходить, только если потенциал положителен на всем интервале между точками  $x=0$  и  $x=b$ . Это видно из формулы (2), но вытекает и из физических соображений, так как интервал, на котором потенциал отрицателен, представлял бы собой потенциальный барьер, который электрон, не имеющий начальной кинетической энергии, не мог бы преодолеть. Однако плотность тока  $j$ , равная  $\rho v$  (под  $\rho$  мы будем понимать абсолютное значение плотности электрических зарядов среды из частиц; оно, конечно, пропорционально массовой плотности), при всех  $x$  одинакова. Отсюда получаем связь плотности среды из частиц с потенциалом:

$$\rho(x) = \frac{j}{v(x)} = j \sqrt{\frac{m}{2e\varphi(x)}}. \quad (3)$$

Пока мы не уточняли вид потенциала. Если принять, что учитывается лишь потенциал от внешнего поля, то  $\varphi(x) = \frac{\Phi_A}{l} x$ , и из (2) и (3) получаем

$$v = \sqrt{\frac{2e\Phi_A}{ml}} x, \quad \rho = j \sqrt{\frac{ml}{2e\Phi_A}} \frac{1}{x}. \quad (4)$$

Суммарный заряд частиц между катодом и анодом, отнесенный к единице площади поперечного сечения, равен

$$v = \int_0^l \rho dx = \sqrt{\frac{2m}{e\Phi_A}} l j. \quad (5)$$

Приведенными подсчетами можно пользоваться, если сила тока сравнительно мала (вскоре мы уточним — по сравнению с чем). Дело в том, что если сила тока велика, то пропорционально велика плотность числа частиц, и тогда потенциал, создаваемый движущимися частицами, может оказаться сравнимым с потенциалом внешнего поля, что будет оказывать существенное влияние на движение частиц. Чтобы прикинуть, для каких плотностей тока собственный потенциал частиц можно не учитывать, примем, что система  $K - A$  представляет собой конденсатор и весь заряд (5) расположен на одной из его обкладок. Тогда разность потенциалов между обкладками будет равна

$$4\pi v l = 4\pi \sqrt{\frac{2m}{e\Phi_A}} l^2 j$$

(см., например, ЭПМ, § X.6). Стало быть, при выполнении условия

$$4\pi \sqrt{\frac{2m}{e\Phi_A}} l^2 j \ll \Phi_A, \quad \text{т. е. } j \ll \frac{1}{4\pi} \sqrt{\frac{e}{2m}} l^{-2} \Phi_A^{3/2} \quad (6)$$

можно пользоваться формулами (4).

Перейдем теперь к случаю, когда условие (6) не выполнено, т. е. сила тока настолько велика, что необходимо учитывать действие на частицы их собственного поля. Для расчета потенциала нужно применить уравнение Пуассона, связывающее плотность распределенного заряда с потенциалом в среде (см., например, ЭПМ, § X.9), которое в нашем случае принимает вид

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 4\pi\rho. \quad (7)$$

Однако имеется еще соотношение (3), справедливое при любом виде потенциала  $\varphi(x)$ . Подставляя (3) в (7), приходим к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = \frac{\eta j}{V\varphi}, \quad (8)$$

где для краткости обозначено  $\eta = 4\pi \sqrt{\frac{m}{2e}}$ . Математически задача сводится, таким образом, к решению дифференциального уравнения (8) при граничных условиях

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(l) = \varphi_A. \quad (9)$$

Уравнение (8) принадлежит к единственному (увы, не слишком широкому) важному и притом допускающему интегрирование в квадратурах классу нелинейных дифференциальных уравнений 2-го порядка, в общем виде:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = F(y). \quad (10)$$

Для интегрирования этого уравнения надо обе части уравнения (10) умножить на  $\frac{dy}{dx}$ , после чего от обеих частей взять интеграл по  $x$ . Это даст

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \int F(y) dy + C_1; \quad (11)$$

затем из обеих частей равенства (11) надо извлечь корень, после чего переменные легко разделяются. (Если на минуту истолковать  $x$  как время, а  $y$  как декартову координату, то (10) будет представлять собой уравнение движения частицы в силовом поле, а (11) — закон сохранения полной энергии, так что по существу в описанном приеме для нас ничего нового нет.) Применяя этот общий прием к уравнению (8), получаем

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d\varphi}{dx} \right)^2 = \int \frac{\eta j}{V\varphi} d\varphi + C_1 = \frac{1}{2} \eta j V\sqrt{\varphi} + C_1. \quad (12)$$

Обозначим для краткости  $\left. \frac{d\varphi}{dx} \right|_{x=0} = \alpha$ ; эта величина заранее не

задается и будет в дальнейшем уточнена. Так как  $\varphi(x) > 0$  ( $0 < x < l$ ) и  $\varphi(0) = 0$ , то  $\alpha \geq 0$ ; с другой стороны, из уравнения (8) следует, что  $\frac{d^2\varphi}{dx^2} > 0$ , т. е. график  $\varphi = \varphi(x)$  выгнут книзу и потому расположен примерно, как на рис. 41, поэтому

$$0 \leq \alpha \leq \frac{\varphi_A}{l}. \quad (13)$$

Подставляя в (12)  $x=0$  и вспоминая, что  $\varphi(0)=0$ , видим, что  $C_1 = \frac{\alpha^2}{2}$ , откуда

$$\frac{d\varphi}{dx} = \sqrt{\alpha^2 + \eta j \sqrt{\varphi}}, \quad \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 + \eta j \sqrt{\varphi}}} = \int dx = x + C_2.$$

Подставляя  $x=0$ , приходим к соотношению

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 + \eta j \sqrt{\varphi}}} = x. \quad (14)$$

При этом первое граничное условие (9) удовлетворяется автоматически, тогда как второе граничное условие приобретает вид

$$\int_0^{\varphi_A} \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 + \eta j \sqrt{\varphi}}} = l. \quad (15)$$

Так как при увеличении  $j$  и  $\alpha$  левая часть (15), очевидно, убывает, то мы получаем, что при увеличении  $j$  значение  $\alpha$  должно убывать, т. е.  $j$  и  $\alpha$  однозначно определяют друг друга. Но для  $\alpha$  имеется минимальное значение  $\alpha=0$  (см. (13)); значит, для  $j$  имеется *максимально возможное (критическое) значение*  $j_{\text{кр}}$ , которое определяется из условия (15) при  $\alpha=0$ :

$$l = \int_0^{\varphi_A} \frac{d\varphi}{\sqrt{\eta j \sqrt{\varphi}}} = \frac{1}{\sqrt{\eta j}} \frac{4}{3} \varphi_A^{3/4}, \quad \text{откуда} \quad j_{\text{кр}} = \frac{16}{9\eta} l^{-2} \varphi_A^{3/2} *). \quad (16)$$

Интересно, что  $j_{\text{кр}}$  превосходит правую часть оценки (6) всего в  $\frac{32}{9}$  раз (проверьте!). Это указывает на правильность структуры формулы (6), т. е. правильность показателей, с которыми входят величины  $e$ ,  $m$ ,  $l$ ,  $\varphi_A$  в правую часть.

\*) Для вывода этой формулы, именуемой *законом Ленгмюра*, существенно, что между катодом и анодом нет никаких других частиц (в частности, ионов), кроме электронов.

Интеграл (14) можно выразить через элементарные функции (для этого достаточно совершить подстановку  $\alpha^2 + \eta j \sqrt{\varphi} = s^2$ , что мы предоставляем читателю), однако при этом получится довольно громоздкое выражение  $x = x(\varphi; \alpha, j)$  и мы не будем его здесь выписывать. Ограничимся случаем  $\alpha = 0$ ,  $j = j_{кр}$ , для которого легко подсчитать  $\varphi = \varphi_A \left(\frac{x}{l}\right)^{4/3}$ , откуда в силу (3) и (16)  $\rho = \frac{4}{9\pi} \varphi_A l^{-4/3} x^{-2/3}$ .

Наименьшему возможному значению  $j = 0$  отвечает в силу (15) и (14) наибольшее значение  $\alpha = \varphi_A/l$  и потенциал  $\varphi = (\varphi_A/l)x$ ; это как раз потенциал внешнего поля. Графики потенциала  $\varphi(x)$  при различных значениях  $j$  показаны на рис. 42. Итак, мы видим, что при учете потенциала движущихся частиц оказывается, что силу тока в системе нельзя увеличивать безгранично: если попытаться при данном  $\varphi_A$  увеличить  $j$  выше  $j_{кр}$  с помощью увеличения эмиссии катода (повышения его температуры), то собственное поле зарядов будет «загонять» их обратно на катод.

Отметим в заключение, что разобранную задачу исследовал впервые Ленгмюр в 1913 г. В 1924 г. С. А. Богуславский исследовал более важный для приложений цилиндрически-симметричный случай. Решение Богуславского более точное и удобное для численных расчетов практического характера, чем решение Ленгмюра.

### Упражнения

1. Для заряда, распределенного по формуле (4), найдите разность потенциалов между любыми двумя точками  $x = x_1$  и  $x = x_2$  ( $0 \leq x_1 < x_2 \leq h$ ). Найдите максимум этой разности по всем  $x_1, x_2$ .
2. Найдите решение дифференциального уравнения  $y'' = e^y$  при начальных условиях  $y|_{x=0} = 0$ ,  $y'|_{x=0} = \sqrt{2}$ ; при произвольных начальных условиях.

## § 16. Расширяющаяся Вселенная

Теория расширяющейся Вселенной является одним из важнейших завоеваний науки XX века. Идея эволюции Вселенной встречала возражения, основанные на предвзятых концепциях, однако итогом работы наблюдателей и теоретиков явилось подтверждение общей картины, развитой в 1922—1924 гг. выдающимся советским математиком А. А. Фридманом на основе общей теории относительности А. Эйнштейна.

Мы рассмотрим здесь простейшую однородную изотропную модель Вселенной, т. е. пространство, заполненное средой из частиц с плотностью  $\rho$ , которая одинакова во всех точках и может зависеть лишь от времени,  $\rho = \rho(t)$ . Из общей теории относительности вытекает,