Интеграл (14) можно выразить через элементарные функции (для этого достаточно совершить подстановку $\alpha^2+\eta j\sqrt{\varphi}=s^2$, что мы предоставляем читателю), однако при этом получится довольно громоздкое выражение $x=x(\varphi;\ \alpha,\ j)$ и мы не будем его здесь выписывать. Ограничимся случаем $\alpha=0$, $j=j_{кр}$, для которого легко подсчитать $\varphi=\varphi_A\left(\frac{x}{l}\right)^{4/3}$, откуда в силу (3) и (16) $\rho=\frac{4}{9\pi}\varphi_A l^{-4/3}x^{-2/3}$.

Наименьшему возможному значению $j=0$ отвечает в силу (15) и (14) наибольшее значение $\alpha=\varphi_A/l$ и потенциал $\varphi=(\varphi_A/l)\,x$; это как раз потенциал внешнего поля. Графики потенциала $\varphi(x)$ при различных значениях j показаны на рис. 42. Итак, мы видим, что при учете потенциала движущихся частиц оказывается, что силу тока в системе нельзя увеличивать безгранично: если попытаться при данном φ_A увеличить j выше $j_{кр}$ с помощью увеличения эмиссии катода (повышения его температуры), то собственное поле зарядов будет «загонять» их обратно на катод.

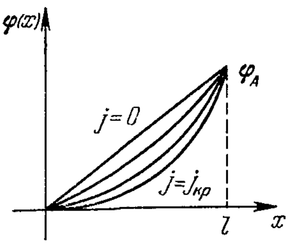

Рис. 42.

Отметим в заключение, что разобранную задачу исследовал впервые Ленгмюр в 1913 г. В 1924 г. С. А. Богуславский исследовал более важный для приложений цилиндрически-симметричный случай. Решение Богуславского более точное и удобное для численных расчетов практического характера, чем решение Ленгмюра.

Упражнения

1. Для заряда, распределенного по формуле (4), найдите разность потенциалов между любыми двумя точками $x=x_1$ и $x=x_2$ $(0\leqslant x_1<x_2\leqslant h)$. Найдите максимум этой разности по всем x_1, x_2.

2. Найдите решение дифференциального уравнения $y''=e^y$ при начальных условиях $y|_{x=0}=0$, $y'|_{x=0}=\sqrt{2}$; при произвольных начальных условиях.

§ 16. Расширяющаяся Вселенная

Теория расширяющейся Вселенной является одним из важнейших завоеваний науки XX века. Идея эволюции Вселенной встречала возражения, основанные на предвзятых концепциях, однако итогом работы наблюдателей и теоретиков явилось подтверждение общей картины, развитой в 1922—1924 гг. выдающимся советским математиком А. А. Фридманом на основе общей теории относительности А. Эйнштейна.

Мы рассмотрим здесь простейшую однородную изотропную модель Вселенной, т. е. пространство, заполненное средой из частиц с плотностью ρ, которая одинакова во всех точках и может зависеть лишь от времени, $\rho=\rho(t)$. Из общей теории относительности вытекает, что в таком пространстве выполняются не привычные из школы аксиомы геометрии, а аксиомы неевклидовой геометрии, или геометрии пространств постоянной кривизны. Однако при изучении локальных свойств пространства это обстоятельство не является существенным, и можно считать, как мы и будем делать, пространство «обычным» — евклидовым и пользоваться обычными правилами ньютоновской механики. Наша задача сводится к отысканию решений вполне определенного типа, описывающих локально однородное в каждый момент времени состояние Вселенной.

Допустим, что в некоторой декартовой системе координат скорость частиц $\boldsymbol{v}$ направлена от начала координат и пропорциональна расстоянию от него, т. е.

$$\boldsymbol{v}=H\boldsymbol{r}. \tag{1}$$

Здесь H — так называемая *постоянная Хаббла*; впрочем, она может зависеть от времени, $H=H(t)$ (ее называют «постоянной», потому что она не зависит от модуля и направления вектора $\boldsymbol{r}$, а также потому, что на обозримых, с точки зрения человеческой цивилизации, промежутках времени она меняется очень мало). Случай $H>0$ как раз и отвечает модели расширяющейся Вселенной, когда расстояние между любой парой частиц возрастает во времени.

Наблюдения, на которых основана излагаемая картина, сводятся к следующему. Во-первых, измеряется длина волны спектральных линий, испускаемых звездами в весьма отдаленных звездных скоплениях (галактиках). Эти линии оказываются смещенными в красную сторону. По закону Допплер-эффекта

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda}=\frac{\lambda_{\text{набл}}-\lambda_{\text{исп}}}{\lambda_{\text{исп}}}=z=\frac{v}{c}$$

можно найти скорость v, с которой удаляются от нас эти галактики. Здесь $\lambda_{\text{исп}}$ есть измеренная наблюдателем в далекой галактике длина волны света, испущенного там же (при этом предполагается, что все законы физики универсальны, одинаковы на Земле, на Солнце и на далекой галактике; в частности, атомы данного сорта всегда и везде испускают спектральные линии одной длины волны); $\lambda_{\text{набл}}$ есть длина волны, измеренная земным наблюдателем. Она отличается от $\lambda_{\text{исп}}$ вследствие относительного движения испускающего атома (вместе со всей далекой галактикой) и земного наблюдателя. Далее, c есть скорость света, v — скорость удаления от нас галактики, т. е. проекция скорости $\boldsymbol{v}$ на радиус-вектор $\boldsymbol{r}$ в системе координат, в начале которой находится Земля (точнее — Солнечная система, еще точнее — наша Галактика).

Во-вторых, определяется расстояние до далекой галактики, т. е. $r=|\boldsymbol{r}|$. Это определение очень трудное; на протяжении 1927—1957 гг. оценка расстояния до данной далекой галактики изменилась в 5—10 раз! Расстояние r легко было бы определить, зная количество L

света, которое испускает данная галактика, и количество света P, которое мы от нее получаем на единицу площади, так как $L=4\pi r^2 P$. Но о светимости галактик можно делать лишь статистические утверждения: можно сказать лишь, какова средняя светимость галактики данного типа.

Определив v и r, строят график зависимости v от r. Точки его лежат на прямой (разброс составляет около 2000—3000 *км/сек*, тогда как измеренные величины лежат в пределах 5000—100000 *км/сек*); наклон $\frac{v}{r}$ этой прямой и есть постоянная Хаббла. Ее размерность, очевидно, $[t]$. Отметим сразу простую ее интерпретацию: если две галактики в какой-то момент t_0 находились в одной точке пространства и, начиная с этого момента, затем удалялись с постоянной скоростью v_0 друг от друга, то в момент t_1 расстояние между ними равно $r=v_0(t_1-t_0)$. Значит, наблюдатель скажет, что $\frac{1}{t_1-t_0}=\frac{v}{r}=H$. Итак, $t_1-t_0=H^{-1}$, т. е. смысл H есть обратное время расширения системы, в предположении расширения с постоянной скоростью. Из наблюдений $H^{-1}\approx 3\cdot 10^{17}$ *сек* $\approx 10^{10}$ лет (см. ниже).

Непосредственно мы узнаём лишь о движении вдоль радиуса-вектора. Косвенные соображения показывают, что скорости, перпендикулярные $\boldsymbol{r}$, относительно малы, не превышают 2000—3000 *км/сек*. В векторной формулировке (1) мы пренебрегаем и разбросом продольных скоростей, и скоростью, перпендикулярной $\boldsymbol{r}$.

На первый взгляд может показаться, что картина, описываемая уравнением (1), неоднородна в пространстве, так как она симметрична относительно специальной точки — начала координат. Но перейдем к системе координат с началом в произвольной точке A, скорость которой, определенная в силу формулы (1), равна $\boldsymbol{v}_A$. Величины, измеренные в новой системе, отметим штрихом. Тогда, очевидно,

$$\boldsymbol{v}'=\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}_A=H\boldsymbol{r}-H\boldsymbol{r}_A=H(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_A)=H\boldsymbol{r}'.$$

Следовательно, в новой системе имеет место тот же закон распределения скоростей $\boldsymbol{v}'$ в зависимости от $\boldsymbol{r}'$, что и в старой для зависимости $\boldsymbol{v}$ от $\boldsymbol{r}$. Распределение скоростей (1) замечательно тем, что оно не выделяет никакой специальной точки, оно однородно и изотропно. Наблюдатель, движущийся вместе со средой, в любой точке видит картину удаления от него всех окружающих его частиц.

Легко получить закон этого удаления. В самом деле, расстояние r_{AB} между любой парой частиц A и B, согласно (1), удовлетворяет уравнению $\frac{dr_{AB}}{dt}=H(t)\,r_{AB}$, откуда

$$r_{AB}(t)=r_{AB}(t_0)\exp\int_{t_0}^{t}H(t)\,dt. \tag{2}$$

Отсюда также видна однородность рассматриваемого процесса расширения.

Так как радиус любого шара меняется по закону (2), то плотность, обратно пропорциональная кубу радиуса, меняется по закону

$$\rho(t)=\rho_0 \exp\left[-3\int_{t_0}^{t} H(t)\,dt\right] \qquad (\rho_0=\rho(t_0)),$$

откуда, дифференцируя, получаем также

$$\frac{d\rho}{dt}=-3H\rho. \tag{3}$$

(Это уравнение можно получить и формально из уравнения неразрывности (I.8.4), подставив в него $\rho=\rho(t)$, $\boldsymbol{v}=H(t)\boldsymbol{r}$ и заметив, что $\operatorname{div}\boldsymbol{r}=3$.)

Конкретный вид зависимости $H(t)$ — и, тем самым, зависимости (2) — можно получить, только приняв определенную гипотезу о *причине* изменения скорости относительного движения частиц во Вселенной. Примем, что это изменение полностью определяется гравитационным взаимодействием и начальными условиями, т. е. что изменение скорости и плотности определяется тяготением частиц друг к другу. («Почему же тогда Вселенная расширяется, а не сжимается?» — может спросить читатель. Но ведь и камень, притягивающийся к Земле, может на определенном этапе своего движения удаляться от нее, а если скорость превышает вторую космическую, то даже все время удаляться. Силы задают только ускорения, а движение в целом зависит не только от сил, но и от начальных условий — в частности, от начальных скоростей. Наблюдение же показывает, что начальные скорости соответствуют расширению Вселенной.)

Примем сначала, что самогравитирующая однородная среда заполняет шар радиуса $R=R(t)$ с центром в начале координат O, а вне этого шара частиц нет, и рассмотрим произвольную частицу A, расположенную на расстоянии $|\boldsymbol{r}|<R$ от O. Разбив мысленно всю среду на шар (K) радиуса $|\boldsymbol{r}|$ с центром в O и на остальную часть, ограниченную двумя концентрическими сферами, мы получим, что гравитационное ускорение, которым обладает частица A, в точности такое же, как если бы она притягивалась массой шара (K), сосредоточенной в O, т. е.

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=-\mathcal{G}\frac{4}{3}\pi|\boldsymbol{r}|^3\rho\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3}=-\frac{4}{3}\pi\mathcal{G}\rho\boldsymbol{r}, \tag{4}$$

где $\mathcal{G}$ — гравитационная постоянная, равная $6{,}7\cdot 10^{-8}$ $г^{-1}\,см^3\,сек^{-2}$. Это показано в § X.6 ЭПМ, где, правда, рассматривалось электростатическое притяжение; но так как закон притяжения элементарных масс такой же, как элементарных зарядов, то и соответствующие интегральные законы одинаковы.

В силу центральной симметрии задачи ясно, прежде всего, что самогравитирующий шар со сферически симметричными начальными скоростями в процессе своей эволюции остается шаром, т. е. сохраняет геометрическое подобие. В механике Ньютона существенно, что исходная форма среды была шаровой: среды эллипсоидальной формы и форм более сложного вида в процессе гравитационной эволюции подобия формы не сохраняют *).

Во-вторых, легко проверить, что если в начальный момент плотность шара была постоянной, а скорости частиц зависели от радиуса-вектора по линейному закону (1), то и во все последующие моменты оба эти свойства будут иметь место, хотя плотность ρ и коэффициент H будут зависеть от времени t. В самом деле, нам надо удовлетворить уравнению движения (4) и уравнению неразрывности. Допустив, что $\rho=\rho(t)$, $\boldsymbol{v}=H(t)\boldsymbol{r}$, мы приведем уравнение (4) к виду

$$-\frac{4}{3}\pi\mathcal{G}\rho\boldsymbol{r}=\frac{d(H\boldsymbol{r})}{dt}=\frac{dH}{dt}\boldsymbol{r}+H\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\frac{dH}{dt}\boldsymbol{r}+H^2\boldsymbol{r},$$

т. е.

$$\frac{dH}{dt}=-H^2-\frac{4}{3}\pi\mathcal{G}\rho. \tag{5}$$

С другой стороны, мы видели, что при сделанных допущениях уравнение неразрывности приобретает вид (3). Таким образом, задача сводится к отысканию решения системы двух дифференциальных уравнений 1-го порядка (3), (5) с двумя неизвестными функциями $\rho(t)$ и $H(t)$. Хорошо известно, что такое решение при заданных начальных условиях

$$\rho(t_0)=\rho_0,\quad H(t_0)=H_0$$

вполне определено, что и доказывает наше утверждение.

Наше утверждение можно пояснить также следующим образом. Допустим, что $\rho=\rho(r,t)$, $H=H(r,t)$ $(r=|\boldsymbol{r}|)$; тогда уравнение (4) и уравнение неразрывности нетрудно привести (проделайте вычисления!) к виду

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial t}&=-H^2-\frac{4}{3}\pi\mathcal{G}\rho-Hr\frac{\partial H}{\partial r},\\ \frac{\partial\rho}{\partial t}&=-3H\rho-r\frac{\partial(H\rho)}{\partial r}.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Предположение, сделанное в начале предыдущего абзаца, означает, что в начальный момент времени ρ и H не зависели от r. Но тогда в силу уравнений (6) и производные $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ и $\frac{\partial H}{\partial t}$ в этот момент не зависят

*) Любопытно, что если в начальный момент распределение скоростей — линейное, а плотность среды, заполняющий эллипсоид,— однородная, то эти свойства сохраняются и во все дальнейшие моменты, и эллипсоид остается эллипсоидом, но отношение его полуосей меняется во времени.

от r, а потому ρ и H в следующий момент не зависят от r и т. д. Таким образом, состояние самогравитирующего шара, при котором плотность во всех точках одинакова, а поле скоростей определяется формулой (1) с коэффициентом H, одинаковым во всех точках, само себя поддерживает: если шар находился в этом состоянии в начальный момент, то он будет находиться в этом состоянии и в последующие (а также в предыдущие) моменты, хотя параметры ρ и H будут меняться.

Наиболее прост случай, когда гравитацией можно пренебречь, т. е. можно положить $\mathcal{G}=0$. Тогда из уравнения (5) получается, что $H=\frac{H_0}{1+H_0(t-t_0)}$, а отсюда из (3) — что $\rho=\rho_0[1+H_0(t-t_0)]^{-3}$.

Если гравитация существенна, то легко получить первый интеграл системы уравнений (3), (5). Именно, поделив одно из этих уравнений на другое и проделав простые преобразования, которые мы предоставим читателю, получим соотношение

$$H^2=\frac{8}{3}\pi\mathcal{G}\rho+C\rho^{2/3},$$

где C — произвольная постоянная, определяемая начальными условиями:

$$C=H_0^2\rho_0^{-2/3}-\frac{8}{3}\pi\mathcal{G}\rho_0^{1/3}. \tag{7}$$

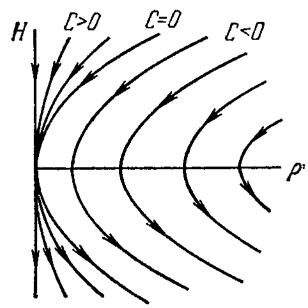

Рис. 43.

Соответствующие линии на плоскости ρ, H показаны на рис. 43; это — линии, каждая из которых изображает возможный закон $\rho=\rho(t)$, $H=H(t)$ эволюции Вселенной. Вдоль каждой из этих линий t служит параметром; направление изменения ρ, H с ростом t, определяемое знаками правых частей (3) и (5), показано стрелками на рис. 43. Выбор конкретной линии на этом рисунке, т. е. выбор конкретного закона эволюции Вселенной, зависит от начальных значений $\rho_0=\rho(t_0)$, $H_0=H(t_0)$, определяющих в плоскости ρ, H точку, через которую проходит искомая линия. Отметим, что при $C\geqslant 0$ линии, расположенные в верхнем квадранте, достигают начала координат только асимптотически, при $t\to\infty$. Это ясно уже из того, что при каждом к о н е ч н о м t через каждую точку плоскости ρ, H проходит только одна интегральная линия системы (3), (5). Можно заметить также, что в силу (3) будет

$$dt=-\frac{d\rho}{3H\rho}, \quad \text{откуда} \quad t=t_0+\frac{1}{3}\int_{\rho}^{\rho_0}\frac{d\rho}{H(\rho)\rho};$$

но полученный интеграл стремится к бесконечности при $\rho\to 0$ (почему?), откуда и следует наше утверждение.

Из рис. 43 мы видим, что в принципе возможно как расширение ($H>0$), так и сжатие ($H<0$) Вселенной. Так как в переживаемый нами период Вселенная расширяется, то точка, изображающая соответствующие значения ρ, H, находится в верхней половине рис. 43. Поэтому, в зависимости от значения C (см. (7)), эволюция Вселенной может пойти по-разному. Если $C<0$, то Вселенная будет еще некоторое время расширяться, пока плотность не достигнет минимального значения, после чего наступит процесс сжатия, в результате которого плотность в конце концов обратится в бесконечность, а расстояния между частицами сожмутся до нуля. (Это произойдет, как мы вскоре увидим, за конечное — впрочем, по нашим человеческим масштабам, достаточно большое — время.) Если же $C\geqslant 0$, то соответствующая точка в плоскости ρ, H будет асимптотически, при $t\to\infty$, стремиться к началу координат, т. е. плотность Вселенной будет стремиться к нулю, а попарные расстояния между частицами — к бесконечности. Графически эти случаи показаны на рис. 44. (Если проводить аналогию с брошенным камнем, о которой мы упоминали выше, то $C<0$ отвечает случаю, когда камень брошен кверху со скоростью, меньшей второй космической, а $C>0$ — случаю, когда эта скорость больше второй космической.)

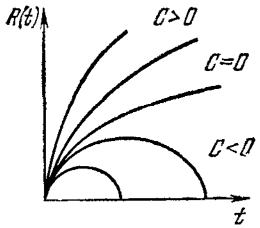

Рис. 44.

Критическое соотношение параметров определяется равенством $C=0$ или, что равносильно

$$(\rho_0)_{кр}=\frac{3}{8\pi\mathcal{G}}H_0^2. \tag{8}$$

Если $\rho_0<(\rho_0)_{кр}$, то $C>0$, т. е. Вселенная будет расширяться всегда; если же $\rho_0>(\rho_0)_{кр}$, то за процессом расширения последует процесс сжатия. Как отмечалось выше, по современным оценкам $H_0\approx\approx 100$ *км·сек*$^{-1}$ *мегапарсек*$^{-1}$ (1 *мегапарсек*$=3{,}09\cdot 10^{24}$ *см*), т. е. в переводе на *сек*$^{-1}$ $H_0\approx 3\cdot 10^{-18}$ *сек*$^{-1}$. Это дает в силу формулы (8) значение $(\rho_0)_{кр}\approx 1\frac{1}{2}\cdot 10^{-29}$ *г/см*^{3}. В то же время, по современным оценкам, средняя плотность Вселенной $\rho_0\approx 5\cdot 10^{-30}$ *г/см*^{3}, т. е. в три раза меньше критической.

Итак, Вселенная будет расширяться всегда. Не поразительно ли, что судьба Вселенной определяется результатом столь простого вычисления! Впрочем, надо помнить, что за этим вычислением кроется огромная кропотливая работа по определению расстояний до далеких галактик, по вычислению их массы и средней плотности $(\rho_0)_{набл}$, составляющей около $5\cdot 10^{-31}$ *г/см*^{3}. При этом по некоторым оценкам можно полагать, что полная плотность, включая разреженный газ, как указано выше, приблизительно в 10 раз больше, но все же меньше критической. Остается также нерешенным вопрос о том, нет ли в составе общей плотности ρ_0 других трудно наблюдаемых форм материи (нейтрино или другие частицы, темные небесные тела и т. д.), которые, добавляясь к $(\rho_0)_{\text{набл}}$, могут довести ρ_0 до критического значения или даже до превышения его *).

Если обратить ход времени, то мы получим, что независимо от начальных условий плотность асимптотически обратится в бесконечность, причем, как будет вскоре показано, за конечное время. На основании приведенных выше оценок это время порядка 10^{10} лет. Подчеркнем, что этот результат качественно не зависит от величины ρ_0 и справедлив при любом знаке постоянной C, от ρ_0 зависит только время предыстории Вселенной.

Вспомним теперь сделанное вначале предположение о том, что рассматриваемая самогравитирующая среда заполняет шар радиуса R. Мы видим, что значение R выпало из расчетов, окончательные результаты не зависят от R. Это дает возможность перейти к пределу при $R \to \infty$ и заключить, тем самым, что наши выводы о эволюции Вселенной применимы и к безграничной модели Вселенной.

К полученным выводам можно прийти также следующим образом. Рассмотрим определенную порцию среды массы M, заключенную в шаре переменного радиуса $|\boldsymbol{r}| = R$ с центром в начале координат. Из формулы (4) получаем, что

$$\frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{\mathscr{G}M}{R^2}.$$

Согласно § 15, промежуточный интеграл этого уравнения можно получить, умножив обе части на $\frac{dR}{dt}$ и проинтегрировав их, что даст

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 - \frac{\mathscr{G}M}{R} = \tilde{C} = \text{const}.$$

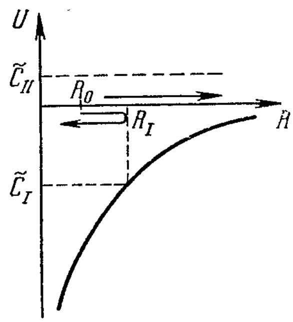

Рис. 45.

Это уравнение имеет вид закона сохранения энергии: первый член слева — кинетическая энергия единицы массы, второй член слева (отрицательный) — ее потенциальная энергия, константа справа, зависящая от начальных условий — полная энергия.

Из рис. 45 ясно, что если $-\frac{\mathscr{G}M}{R_0} < \tilde{C} < 0$ и $\left(\frac{dR}{dt}\right)_0 > 0$, то радиус R сначала увеличивается, до значения R_I на рис. 45, после чего начинает уменьшаться, и так как скорость этого уменьшения нарастает (до бесконечности), то з а к о н е ч н о е в р е м я радиус дойдет до значения $R=0$. Если же $\tilde{C} \geqslant 0$ и $\left(\frac{dR}{dt}\right)_0 > 0$, то радиус R будет монотонно увеличиваться до бесконечности, но так как

*) В 1972 г. появилось короткое сообщение, согласно которому $H_0 = 55 \pm \pm 5$ *км·сек*$^{-1}$ *мегапарсек*$^{-1} = 1{,}8 \cdot 10^{-18}$ *сек*$^{-1}$. Если это так, то критическое значение плотности надо понизить примерно в три раза, т. е. сделать надежный вывод о соотношении между ρ_0 и $\rho_{\text{кр}}$ пока невозможно.

скорость этого увеличения убывает, то значение $R=\infty$ будет достигнуто лишь при $t=\infty$.

Нетрудно связать $\tilde{C}$ с введенной выше постоянной C:

$$\tilde{C}=\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)_0^2-\frac{\mathcal{G}M}{R_0}=\frac{1}{2}(H_0R_0)^2-\frac{\mathcal{G}}{R_0}\frac{4}{3}\pi R_0^3\rho_0=\frac{1}{2}R_0^2\rho_0^{2/3}C.$$

Таким образом, знаки $\tilde{C}$ и C одинаковы и потому разобранные сейчас случаи совпадают со случаями, рассмотренными в связи с рис. 43.

Вывод о двух возможных типах эволюции Вселенной был получен А. А. Фридманом из общей теории относительности. В этой теории случаю $C>0$ отвечает *замкнутая модель* Вселенной (имеющей конечный объем, наподобие пузыря, но на единицу более высокой размерности), в которой выполняются аксиомы так называемой геометрии Римана, а случаю $C>0$ отвечает *открытая модель* Вселенной (имеющей бесконечный объем), в которой выполняются аксиомы геометрии Лобачевского. Английские астрофизики Мак-Кри и Милн в 1934 г. обнаружили, что эти же эволюционные выводы можно получить и с помощью ньютоновской механики на основе модели Вселенной, которую мы здесь рассмотрели.

В дальнейшем эти исследования были пополнены рядом авторов. Так, рассмотрено влияние давления вещества на эволюцию. Исследован вопрос об устойчивости однородного мира, причем оказалось, что длинноволновые возмущения имеют тенденцию нарастать, т. е. в первоначально однородной среде развиваются сгустки достаточно большого размера. Изучена однородная анизотропная космологическая модель и т. д. Эти результаты и их обсуждение читатель может найти в главах 15, 19 и 21 книги Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова «Релятивистская астрофизика» («Наука», 1967) и в книге «Космология» тех же авторов, которая сейчас готовится к печати.

§ 17. Случай влияния локального параметра среды на скорость частиц

Вернемся к рассмотренной в § 4 задаче об эволюции среды из невзаимодействующих частиц, обладающих параметром ϑ, однако обобщим постановку этой задачи, допустив, что значение ϑ может влиять на скорость v частицы по известному закону. Например, можно себе представить, что локальным параметром частицы служит ее температура, изменяющаяся в процессе движения частицы, что каким-то образом влияет на ее скорость.

Таким образом, выражение для скорости теперь имеет вид $v=v(x, t, \vartheta)$. Уравнение для изменения локального параметра

$$\frac{d\vartheta}{dt}=g(x, t, \vartheta) \qquad (1)=(4.1)$$