скорость этого увеличения убывает, то значение $R=\infty$ будет достигнуто лишь при $t=\infty$.

Нетрудно связать $\tilde{C}$ с введенной выше постоянной C:

$$\tilde{C}=\frac{1}{2}\left(\frac{dR}{dt}\right)_0^2-\frac{\mathcal{G}M}{R_0}=\frac{1}{2}(H_0R_0)^2-\frac{\mathcal{G}}{R_0}\frac{4}{3}\pi R_0^3\rho_0=\frac{1}{2}R_0^2\rho_0^{2/3}C.$$

Таким образом, знаки $\tilde{C}$ и C одинаковы и потому разобранные сейчас случаи совпадают со случаями, рассмотренными в связи с рис. 43.

Вывод о двух возможных типах эволюции Вселенной был получен А. А. Фридманом из общей теории относительности. В этой теории случаю $C>0$ отвечает *замкнутая модель* Вселенной (имеющей конечный объем, наподобие пузыря, но на единицу более высокой размерности), в которой выполняются аксиомы так называемой геометрии Римана, а случаю $C>0$ отвечает *открытая модель* Вселенной (имеющей бесконечный объем), в которой выполняются аксиомы геометрии Лобачевского. Английские астрофизики Мак-Кри и Милн в 1934 г. обнаружили, что эти же эволюционные выводы можно получить и с помощью ньютоновской механики на основе модели Вселенной, которую мы здесь рассмотрели.

В дальнейшем эти исследования были пополнены рядом авторов. Так, рассмотрено влияние давления вещества на эволюцию. Исследован вопрос об устойчивости однородного мира, причем оказалось, что длинноволновые возмущения имеют тенденцию нарастать, т. е. в первоначально однородной среде развиваются сгустки достаточно большого размера. Изучена однородная анизотропная космологическая модель и т. д. Эти результаты и их обсуждение читатель может найти в главах 15, 19 и 21 книги Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова «Релятивистская астрофизика» («Наука», 1967) и в книге «Космология» тех же авторов, которая сейчас готовится к печати.

§ 17. Случай влияния локального параметра среды на скорость частиц

Вернемся к рассмотренной в § 4 задаче об эволюции среды из невзаимодействующих частиц, обладающих параметром ϑ, однако обобщим постановку этой задачи, допустив, что значение ϑ может влиять на скорость v частицы по известному закону. Например, можно себе представить, что локальным параметром частицы служит ее температура, изменяющаяся в процессе движения частицы, что каким-то образом влияет на ее скорость.

Таким образом, выражение для скорости теперь имеет вид $v=v(x, t, \vartheta)$. Уравнение для изменения локального параметра

$$\frac{d\vartheta}{dt}=g(x, t, \vartheta) \qquad (1)=(4.1)$$

в координатах Эйлера будет выглядеть так:

$$v(x,\ t,\ \vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=g(x,\ t,\ \vartheta), \tag{2}$$

а уравнение движения частицы:

$$\frac{dx}{dt}=v(x,\ t,\ \vartheta). \tag{3}$$

Мы будем считать зависимости $g(x,\ t,\ \vartheta)$ и $v(x,\ t,\ \vartheta)$ заданными.

Принципиально новым моментом в рассматриваемой сейчас ситуации является то, что уравнение движения частиц теперь нельзя интегрировать без учета уравнения для изменения ϑ. Другими словами, уравнения (1) и (3) надо рассматривать как систему двух дифференциальных уравнений 1-го порядка с двумя искомыми функциями $\vartheta(t)$ и $x(t)$. Обозначим через

$$x=\varphi(t;\ t_1,\ x_1,\ \vartheta_1),\quad \vartheta=\psi(t;\ t_1,\ x_1,\ \vartheta_1) \tag{4}$$

решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$x(t_1)=x_1,\quad \vartheta(t_1)=\vartheta_1.$$

Линия, изображающая любое такое решение в пространстве t, x, ϑ, снова называется *характеристикой* уравнения (2); ее проекции на плоскости x, t и ϑ, t дают, соответственно, закон движения частицы и закон изменения параметра ϑ для этой частицы (рис. 46). Отметим, что термин «характеристика» здесь применяется в несколько ином смысле, чем ранее; ниже мы более подробно поговорим об этом.

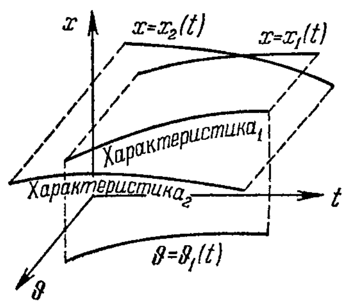

Рис. 46.

Конечно, характеристики между собой не пересекаются, так как через каждую точку пространства t, x, ϑ проходит только одна интегральная линия системы уравнений (1), (3). Однако проекции характеристик на плоскость x, t могут пересекаться (рис. 46); другими словами, частицы могут обгонять одна другую. Это и понятно: например, если скорость частицы увеличивается с повышением ее температуры, то более нагретые частицы могут обогнать менее нагретые.

Допустим теперь, что задано начальное распределение параметра ϑ:

$$\vartheta|_{t=t_0}=\vartheta_0(x),$$

а нас интересует закон его распределения $\vartheta=\vartheta(x,\ t)$ в дальнейшие моменты времени. Тогда, воспользовавшись формулами (4), можем написать

$$\psi(t_0;\ t,\ x,\ \vartheta)=\vartheta_0(\varphi(t_0;\ t,\ x,\vartheta))$$

(почему?). Из этого соотношения и определяется зависимость $\vartheta(x,\ t)$. Из-за возможности обгона частицами друг друга здесь, как и в § 10, с течением времени могут образоваться перехлесты, что ведет к многозначности ϑ; некоторые из этих перехлестов могут в дальнейшем рассасываться.

Математическим обобщением уравнения (2) служит уравнение

$$a(x,\ t,\ \vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+b(x,\ t,\ \vartheta)\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=g(x,\ t,\ \vartheta), \tag{5}$$

которое называется *квазилинейным* *) (это более общее уравнение, чем (5.1), так как здесь допускается зависимость коэффициентов от искомой функции). Так как уравнение (5) приобретает вид (2) после деления на $b(x,\ t,\ \vartheta)$, то дифференциальными уравнениями характеристик для него, взамен (3), (1), будут

$$\frac{dx}{dt}=\frac{a(x,\ t,\ \vartheta)}{b(x,\ t,\ \vartheta)},\qquad \frac{d\vartheta}{dt}=\frac{g(x,\ t,\ \vartheta)}{b(x,\ t,\ \vartheta)}$$

или, в более симметричной форме,

$$\frac{dx}{a(x,\ t,\ \vartheta)}=\frac{dt}{b(x,\ t,\ \vartheta)}=\frac{d\vartheta}{g(x,\ t,\ \vartheta)}. \tag{6}$$

Таким образом, характеристиками уравнения (5) служат линии в пространстве $x,\ t,\ \vartheta$; через каждую точку пространства проходит ровно одна характеристика.

Так как решение $\vartheta(x,\ t)$ уравнения (5) описывает эволюцию однопараметрического семейства частиц, для каждой из которых удовлетворяется уравнение характеристик (6), то мы получаем, что *любая интегральная поверхность квазилинейного уравнения* (т. е. график его решения) *полностью составлена из его характеристик.*

В силу сказанного решение задачи с начальным условием для уравнения (5) приобретает следующий геометрический смысл. Пусть решение ϑ задано во всех точках некоторой линии $(\mathscr{L})$ плоскости $x,\ t$ (рис. 47). Это условие определяет в пространстве $x,\ t,\ \vartheta$ некоторую линию $(\mathscr{L}')$, проектирующуюся на $(\mathscr{L})$; если через все точки $(\mathscr{L}')$ провести характеристики, то и получится искомая интегральная поверхность (S) (рис. 47). Аналитическое оформление этого простого геометрического метода в случае, когда линия $(\mathscr{L})$ представляет собой прямую $t=t_0$, было описано в связи с уравнением (2), а в случае линии общего вида, заданной параметрически, мы предоставляем читателю (см. упражнение 1).

---

*) Этот термин призван напомнить, что уравнение, хоть в целом и нелинейное, является линейным относительно производных от искомой функции.

К сделанному выше выводу о расположении характеристик можно формально прийти также следующим образом. Пусть $\vartheta = \Phi(x, t)$ — некоторое решение уравнения (5). Образуем разность

$$F(x, t, \vartheta) \equiv \vartheta - \Phi(x, t)$$

и будем в ней рассматривать x, t, ϑ как независимые переменные. Тогда дифференциал этой функции вдоль характеристики, удовлетворяющий уравнениям (6), равен

$$dF = d\vartheta - \frac{\partial\Phi}{\partial x}dx - \frac{\partial\Phi}{\partial t}dt \backsim g - \frac{\partial\Phi}{\partial x}a - \frac{\partial\Phi}{\partial t}b \equiv 0.$$

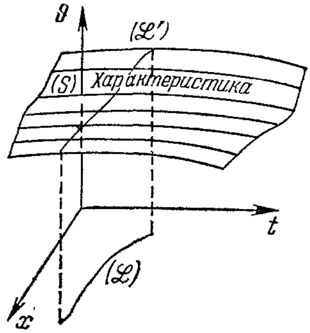

Рис. 47.

Значит, вдоль характеристики $F \equiv \text{const}$, и потому, если рассматриваемая характеристика имеет с поверхностью $\vartheta = \Phi(x, t)$ общую точку, в которой должно быть $F = 0$, то и вдоль всей характеристики будет $F \equiv 0$, т. е. она целиком лежит на этой поверхности.

Так как почти линейные уравнения (§ 5) являются частным случаем квазилинейных, то получается, что для почти линейных уравнений имеется два неравносильных определения характеристик: согласно одному из них, это линии в плоскости аргументов x, t, а согласно другому — это линии в пространстве аргументов-функции x, t, ϑ. Однако соотношение между этими определениями весьма простое.

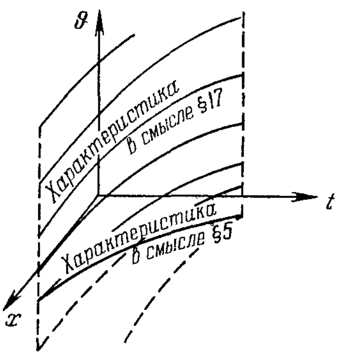

Рис. 48.

В самом деле, допустим, что коэффициенты уравнения (5) не зависят от ϑ. Тогда первые два уравнения (6) интегрируются независимо от третьего и дают в плоскости x, t характеристики в смысле § 5. Это значит, что если $x = x(q)$, $t = t(q)$, $\vartheta = \vartheta(q)$ — уравнение характеристики в пространстве аргументов-функции, то, отбрасывая последнее уравнение, мы получим уравнения характеристики в плоскости аргументов. Другими словами, для почти линейных уравнений характеристики в смысле § 5 представляют собой проекции характеристик в смысле этого параграфа на плоскость аргументов. Видно также, что одну и ту же проекцию имеет однопараметрическое семейство характеристик в пространстве аргументов-функции, заполняющее двумерную цилиндрическую поверхность (рис. 48).

Мы уже упоминали о том, что характеристики квазилинейного уравнения заполняют пространство аргументов-функции без взаимных пересечений. Однако если уравнение не является почти линейным, то проекции этих характеристик на плоскость аргументов, конечно, могут пересекаться, что и порождает возможность обращения в бесконечность производных от решения при его продолжении с последующим образованием перехлеста. Существенно отметить, что такое осложнение может возникнуть, даже если коэффициенты заданного уравнения, начальные данные, а также их производные разрывов не имеют, так как все определяется взаимным расположением характеристик в пространстве.

Указанная в связи с рис. 47 конструкция решений уравнения (5) наводит на мысль о равноправии переменных x, t, ϑ в этом уравнении. Чтобы проверить это, примем, например, x и ϑ за независимые переменные и будем рассматривать t как функцию от этих переменных, $t=t(x, \vartheta)$. Разрешая уравнение

$$dt=\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{\vartheta} dx+\left.\frac{\partial t}{\partial \vartheta}\right|_{x} d\vartheta$$

(внизу вертикальной черты указывается величина, которая в процессе дифференцирования считается постоянной) относительно $d\vartheta$, получаем выражения

$$\left.\frac{\partial \vartheta}{\partial t}\right|_{x}=\left(\left.\frac{\partial t}{\partial \vartheta}\right|_{x}\right)^{-1}, \quad \left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{t}=-\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{\vartheta}\left(\left.\frac{\partial t}{\partial \vartheta}\right|_{x}\right)^{-1}.$$

Подставляя их в уравнение (5), получаем после простых преобразований уравнение для функции $t(x, \vartheta)$:

$$a(x, t, \vartheta)\frac{\partial t}{\partial x}+g(x, t, \vartheta)\frac{\partial t}{\partial \vartheta}=b(x, t, \vartheta). \tag{7}$$

Это уравнение имеет ту же структуру, что (5), и характеристиками для него будут те же линии, что для (5) (почему?).

Это свойство дает возможность в некоторых случаях упростить исходное уравнение (5). Например, если коэффициенты a, b и g не зависят от t (автономный случай), то после перехода к отысканию зависимости $t(x, \vartheta)$ квазилинейное уравнение (5) заменится на линейное уравнение (7).

К рассмотренному уравнению приводятся некоторые задачи об эволюции среды из взаимодействующих частиц. Рассмотрим, например, задачу о построении плотности ρ среды в случае, когда скорость v частиц зависит от ρ. Здесь уравнение неразрывности приобретает вид

$$(v(x, t, \rho)\,\rho)'_x+\rho'_t=0, \tag{8}$$

и законы движения отдельных частиц нельзя строить независимо друг от друга, как это делалось раньше. Однако если уравнение

(8) переписать в виде

$$[v(x,\ t,\ \rho)+\rho v'_\rho(x,\ t,\ \rho)]\,\rho'_x+\rho'_t=-\rho v'_x(x,\ t,\ \rho),$$

то мы приходим к уравнению вида (5) для функции $\rho(x,\ t)$. В силу (1) и (3) система уравнений характеристик в пространстве $x,\ t,\ \rho$ имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=v(x,\ t,\ \rho)+\rho v'_\rho(x,\ t,\ \rho),\quad \frac{d\rho}{dt}=-\rho v'_x(x,\ t,\ \rho).$$

(Отметим, что из первого уравнения видно, что при $v'_\rho\neq 0$ зависимость $x(t)$ для характеристики уже не служит законом движения частицы.) Построение решения $\rho(x,\ t)$ при заданном начальном условии можно осуществить так, как это было описано в связи с уравнением (2).

Упражнения

1. Опишите подробно аналитическую процедуру построения решения уравнения (5) при заданном начальном условии.

2. Найдите решение уравнения $\vartheta\vartheta'_x+\vartheta'_t=0$, удовлетворяющее начальному условию $\vartheta|_{t=0}=ax$; рассмотрите отдельно случаи $a>0$ и $a<0$. Переписав уравнение в форме $\left(\frac{1}{2}\vartheta^2\right)'_x+\vartheta'_t=0$, укажите аналог закона сохранения числа частиц и проверьте его для построенного решения.

3. Найдите решение уравнения $\vartheta\vartheta'_x+\vartheta'_t=0$, удовлетворяющее начальному условию $\vartheta|_{t=0}=\frac{1}{1+x^2}$.

Указание. Воспользуйтесь графическим решением уравнения $\frac{1}{1+p^2}=$ $=ap+b$.

§ 18. Метод сеток для уравнения эволюции локального параметра

Вернемся к уравнению

$$v(x,\ t)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=g(x,\ t,\ \vartheta) \qquad (1)=(4.2)$$

с начальным условием

$$\vartheta|_{t=t_0}=\vartheta_0(x). \qquad (2)=(3.3)$$

Так как точное решение этой задачи в виде аналитической формулы возможно лишь в редких случаях, то естественно обратиться к численному решению. При этом возможны два различных перехода: именно, можно либо воспользоваться интегрированием вдоль характеристик уравнения (1), либо применить более простой и грубый подход, не использующий характеристик.

При первом подходе мы как бы следим за судьбой отдельных дискретных частиц, выбрав их в момент t_0, т. е. как бы совершаем