(8) переписать в виде

$$[v(x, t, \rho)+\rho v'_\rho(x, t, \rho)]\,\rho'_x+\rho'_t=-\rho v'_x(x, t, \rho),$$

то мы приходим к уравнению вида (5) для функции $\rho(x, t)$. В силу (1) и (3) система уравнений характеристик в пространстве x, t, ρ имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=v(x, t, \rho)+\rho v'_\rho(x, t, \rho), \quad \frac{d\rho}{dt}=-\rho v'_x(x, t, \rho).$$

(Отметим, что из первого уравнения видно, что при $v'_\rho\neq 0$ зависимость $x(t)$ для характеристики уже не служит законом движения частицы.) Построение решения $\rho(x, t)$ при заданном начальном условии можно осуществить так, как это было описано в связи с уравнением (2).

Упражнения

1. Опишите подробно аналитическую процедуру построения решения уравнения (5) при заданном начальном условии.

2. Найдите решение уравнения $\vartheta\vartheta'_x+\vartheta'_t=0$, удовлетворяющее начальному условию $\vartheta|_{t=0}=ax$; рассмотрите отдельно случаи $a>0$ и $a<0$. Переписав уравнение в форме $\left(\frac{1}{2}\vartheta^2\right)'_x+\vartheta'_t=0$, укажите аналог закона сохранения числа частиц и проверьте его для построенного решения.

3. Найдите решение уравнения $\vartheta\vartheta'_x+\vartheta'_t=0$, удовлетворяющее начальному условию $\vartheta|_{t=0}=\frac{1}{1+x^2}$.

Указание. Воспользуйтесь графическим решением уравнения $\frac{1}{1+p^2}=$ $=ap+b$.

§ 18. Метод сеток для уравнения эволюции локального параметра

Вернемся к уравнению

$$v(x, t)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=g(x, t, \vartheta) \qquad (1)=(4.2)$$

с начальным условием

$$\vartheta|_{t=t_0}=\vartheta_0(x). \qquad (2)=(3.3)$$

Так как точное решение этой задачи в виде аналитической формулы возможно лишь в редких случаях, то естественно обратиться к численному решению. При этом возможны два различных перехода: именно, можно либо воспользоваться интегрированием вдоль характеристик уравнения (1), либо применить более простой и грубый подход, не использующий характеристик.

При первом подходе мы как бы следим за судьбой отдельных дискретных частиц, выбрав их в момент t_0, т. е. как бы совершаем переход, обратный тому, который был проделан в § I.1. Пусть эти частицы в момент t_0 имели координату $x=mh$, где m — любое целое число, а $h>0$ — выбранный шаг. Тогда, чтобы найти зависимости $x(t)$ и $\vartheta(t)$ для такой частицы, согласно § 4, надо решить систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=v(x,\ t),\qquad \frac{d\vartheta}{dt}=g(x,\ t,\ \vartheta) \tag{3}$$

при начальных условиях

$$x|_{t=t_0}=mh,\quad \vartheta|_{t=t_0}=\vartheta_0(mh). \tag{4}$$

Это можно сделать с помощью какого-либо из численных методов, известных в теории обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, ЭПМ, § VIII.7), причем с хорошей точностью.

Если обозначить решение системы (3) при начальных данных (4) через $x_m(t)$, $\vartheta_m(t)$, то, задавшись любым значением $t=T$, получаем таблицу значений искомого решения

$$\vartheta(x,\ T)|_{x=x_m(T)}=\vartheta_m(T)$$

на интересующем нас интервале значений x. Можно, например, задаться шагом $\tau>0$ по времени и полагать $T=t_0+\tau,\ t_0+2\tau,\ \ldots$, что приведет к таблице с двумя входами для искомого решения. Некоторым (впрочем, небольшим) недостатком этой таблицы будет то, что она по x неравномерна (значение $x_{m+1}(t_0+n\tau)-x_m(t_0+n\tau)$, вообще говоря, зависит как от m, так и от n), так как расстояние между частицами в процессе их движения, вообще говоря, изменяется. Однако надо иметь в виду, что любое конкретное значение $\vartheta(\bar{x},\ \bar{t})$ нетрудно непосредственно вычислить так: сначала численно проинтегрировать уравнение $\frac{dx}{dt}=v(x,\ t)$ при начальном условии $x(\bar{t})=\bar{x}$, найти соответствующее значение $x(t_0)=\bar{x}_0$, после этого численно проинтегрировать систему (3) при начальных условиях $x(t_0)=\bar{x}_0$, $\vartheta(t_0)=\vartheta_0(\bar{x}_0)$, откуда и получить $\vartheta(\bar{x},\ \bar{t})=\vartheta(\bar{t})$.

Второй подход к численному решению исходной задачи (метод сеток) основан на переходе от дифференциального уравнения (1) к разностному с помощью замены производных отношениями приращений. Он имеет очень широкую область применения, в том числе к более сложным задачам, для которых первый подход неприменим; к тому же метод сеток наиболее приспособлен к применению ЭЦВМ — электронных цифровых вычислительных машин. Целесообразно разобрать этот второй подход на рассматриваемом простом примере задачи (1) — (2).

Мы еще более упростим задачу, ограничившись уравнением

$$v\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=0\qquad (v=\mathrm{const}>0); \tag{5}$$

тогда при начальном условии (2) решение, очевидно, равно $\vartheta = \vartheta_0(x - v(t - t_0))$. Однако, имея в виду более сложные уравнения, мы этим решением пользоваться не будем. Для простоты будем считать, что начальная функция $\vartheta_0(x)$ отлична от нуля только на некотором интервале $0 \leqslant x \leqslant b$.

Выберем, пока произвольно, шаги h по x и τ по t и обозначим

$$\vartheta(mh,\ t_0 + n\tau) = \vartheta_{mn},$$

где m, n принимают целые значения. Таким образом, мы будем искать значения решения только в узлах сетки, изображенной на рис. 49.

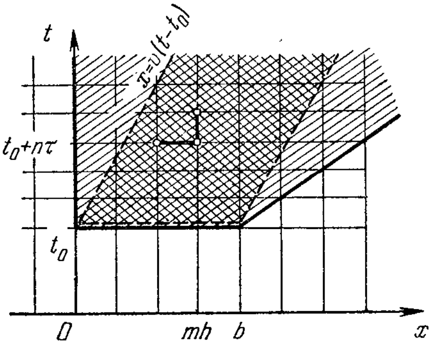

Рис. 49.

В результате замены производных в уравнении (5) отношениями приращений значения искомого решения в нескольких соседних узлах (в любом месте сетки) окажутся связанными друг с другом. Это можно сделать по-разному. Пусть, например, мы воспользуемся приближенными формулами

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{mn} \approx \frac{\vartheta_{mn} - \vartheta_{m-1,\,n}}{h}, \quad \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)_{mn} \approx \frac{\vartheta_{m,\,m+1} - \vartheta_{mn}}{\tau}. \tag{6}$$

Тогда упомянутая связь примет вид

$$v\,\frac{\vartheta_{mn} - \vartheta_{m-1,\,n}}{h} + \frac{\vartheta_{m,\,n+1} - \vartheta_{mn}}{\tau} = 0, \tag{7}$$

т. е. связанными будут значения решения в узлах, показанных кружками в середине рис. 49.

Из разностного уравнения (7), приближенно заменяющего (5), получаем

$$\vartheta_{m,\,n+1} = \left(1 - \frac{v\tau}{h}\right)\vartheta_{mn} + \frac{v\tau}{h}\,\vartheta_{m-1,\,n}. \tag{8}$$

Но значения

$$\vartheta_{m0} = \vartheta_0(mh) \tag{9}$$

заданы. Поэтому, полагая $m=0$, мы из (8) находим значения ϑ_{m1}; после этого, полагая $m=1$ и пользуясь найденными значениями ϑ_{m1}, мы из (8) получаем значения ϑ_{m2} и т. д. Эти значения и должны приближенно представлять искомое решение $\vartheta(x,\ t)$.

Из структуры связи (8) следует, что если $\vartheta_0(x) \neq 0$ только при $0 \leqslant x \leqslant a$, то значения ϑ_{mn} могут быть отличными от нуля только в заштрихованной на рис. 49 части плоскости (почему?). Однако из формулы для точного решения вытекает, что при $t \geqslant t_0$ оно отлично от нуля только в области, которая на рис. 49 заштрихована дважды. Отсюда сразу следует, что значения ϑ_{mn} могут правильно аппроксимировать точное решение, только если вторая область включается в первую, т. е. если (см. рис. 49)

$$\frac{\tau}{h} \leqslant \frac{1}{v} \quad \text{или, что то же,} \quad \frac{v\tau}{h} \leqslant 1. \tag{10}$$

(Может возникнуть недоумение в связи с тем, что в двух углах, заштрихованных на рис. 49 один раз, значения ϑ_{mn}, вообще говоря, отличны от нуля, тогда как точное решение там тождественно равно нулю. Однако нетрудно проверить, что значения ϑ_{mn} в этих углах с ростом n стремятся к нулю с большой скоростью, поэтому отличие этих значений от нуля не противоречит тому, что они аппроксимируют точное решение.)

Схема вычислений, подобная рассмотренной, в которой значения решения в каждом последующем слое (в разобранном примере каждый такой слой отвечал определенному значению n) определяются непосредственно через значения решения в предыдущих слоях, называется *явной*. Казалось бы, явные схемы наиболее удобны для вычислений. Однако когда такие схемы стали впервые применять на ЭЦВМ, то столкнулись с одним непредвиденным осложнением; речь идет о возможной *неустойчивости* вычислений. Дело в том, что для хорошей аппроксимации дифференциального уравнения разностным значения h и τ должны быть достаточно малыми. Поэтому, чтобы сосчитать решение на не слишком малом временно́м промежутке, требуется проделать весьма большое число временны́х шагов (n достигает весьма больших значений). Однако каждое вычисление осуществляется с определенной погрешностью, проистекающей как из-за неточной аппроксимации дифференциального уравнения разностным, так и из-за ошибок округления. В вопросе устойчивости вычислений главную роль играет второй источник ошибок. Именно, оказывается, что для некоторых вычислительных схем ошибки округления при переходе с одно́го временно́го слоя на следующий разрастаются и после нескольких таких переходов полностью подавляют решение. Вычисляемые значения безудержно разрастаются, бешено осциллируя (по этим признакам обычно распознается неустойчивость), и не имеют ничего общего с истинным решением. (О неустойчивости вычислений см. также ЭПМ, § XV.5.)

Покажем, как можно предвидеть неустойчивость схемы. Для этого допустим, что функция $\vartheta(x, t)$ принимает, вообще говоря, комплексные значения и что в начальные данные внесена ошибка

$$\Delta\vartheta_{m0} = \alpha e^{i\gamma m}, \tag{11}$$

где α, γ — некоторые вещественные параметры. (Как известно,— см., например, ЭПМ, гл. XIV,— с помощью суммы таких функций можно представить произвольную функцию, ограниченную для всех

m.) Если принять эту ошибку за начальное условие, то соответствующее решение уравнения (7), как мы сейчас покажем, будет иметь вид

$$\Delta\vartheta_{mn} = \alpha e^{i\gamma m} p^n, \tag{12}$$

где p — некоторая постоянная. В самом деле, подстановка (11) в (7) дает после сокращений (проверьте!)

$$v\frac{1-e^{-i\gamma}}{h} + \frac{p-1}{\tau} = 0, \tag{13}$$

откуда можно найти p:

$$p = 1 - \frac{v\tau}{h}(1 - e^{-i\gamma}) = 1 - \frac{v\tau}{h} + \frac{v\tau}{h}\cos\gamma - i\frac{v\tau}{h}\sin\gamma. \tag{14}$$

Для дальнейшего важно сравнить $|p|$ с 1. Из (14) легко получаем

$$|p|^2 = 1 - 2\frac{v\tau}{h} + 2\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2 + 2\left[\frac{v\tau}{h} - \left(\frac{v\tau}{h}\right)^2\right]\cos\gamma.$$

Так как правая часть зависит от $\cos\gamma$ линейно, то она заключена между границами, которые получатся, если вместо $\cos\gamma$ подставить его крайние значения, т. е. между

$$1 - 2\frac{v\tau}{h} + 2\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2 + 2\left[\frac{v\tau}{h} - \left(\frac{v\tau}{h}\right)^2\right](-1) = \left(1 - 2\frac{v\tau}{h}\right)^2$$

и

$$1 - 2\frac{v\tau}{h} + 2\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2 + 2\left[\frac{v\tau}{h} - \left(\frac{v\tau}{h}\right)^2\right]\cdot 1 = 1.$$

Поэтому могут представиться два случая. Если $\left|1 - 2\frac{v\tau}{h}\right| \leqslant 1$ (а это равносильно условию (10)!), то $|p| \leqslant 1$ (даже, за исключением крайних значений, $|p| < 1$); формула (12) показывает, что погрешность в решении будет с ростом n, т. е. с переходом к последующим временны́м слоям, затухать. Аналогичным образом будут затухать погрешности, порожденные ошибками округления на любом шаге по времени, т. е. схема будет устойчивой. Если же условие (10) нарушено, то при $\cos\gamma = -1$, т. е. при $\Delta\vartheta_{m0} = (-1)^m\alpha$, будет $|p| > 1$, а потому с переходом к последующим временны́м слоям ошибка будет разрастаться; это неустойчивая схема. Итак, условие (10) получает обоснование также и с позиций устойчивости вычислительной схемы.

(Мы предоставляем читателю проверить, что если первую формулу (6) заменить на $\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{mn} \approx \frac{\vartheta_{m+1,\,n} - \vartheta_{mn}}{h}$, то получится явная схема, которая в случае $v > 0$ будет всегда неустойчивой.)

Полученный результат дает основание ожидать, что замена (6) возможна и для общего уравнения (1) при $v(x,\ t) > 0$. Эта замена приводит к разностному уравнению

$$v(x_m, t_n)\frac{\vartheta_{mn}-\vartheta_{m-1,n}}{h}+\frac{\vartheta_{m,n+1}-\vartheta_{mn}}{\tau}=g(x_m, t_n, \vartheta_{mn}),$$

где обозначено $x_m=mh$, $t_n=t_0+n\tau$. Последнее уравнение в сочетании с начальным условием (9) приводит к явной вычислительной схеме, причем аналогом условия (10) будет

$$\frac{\tau}{h}\max v\leqslant 1.$$

Чтобы охватить случай, когда функция v может менять знак, можно заменить первую формулу (6) на более точную симметричную формулу $\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{mn}\approx\frac{\vartheta_{m+1,n}-\vartheta_{m-1,n}}{2h}$. Тогда взамен (13) мы получим уравнение

$$v\frac{e^{i\gamma}-e^{-i\gamma}}{2h}+\frac{p-1}{\tau}=0,$$

откуда

$$p=1-i\frac{v\tau}{h}\sin\gamma,\quad |p|^2=1+\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2\sin^2\gamma. \tag{15}$$

Может показаться, что так как получилось $|p|>1$, то эта схема неустойчивая. Но на самом деле положение можно спасти за счет существенного уменьшения временно́го шага τ. В самом деле, чтобы продвинуться до момента t, надо совершить $\frac{t-t_0}{\tau}$ временны́х шагов. Из формулы (12) видно, что при этом исходная ошибка умножится на $p^{(t-t_0)/\tau}$; но в силу (15)

$$|p^{(t-t_0)/\tau}|=\left[1+\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2\sin^2\gamma\right]^{(t-t_0)/2\tau}\leqslant\left[1+\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2\right]^{(t-t_0)/2\tau}. \tag{16}$$

Пусть $\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2\ll 1$; тогда из формулы $1+\alpha\approx e^\alpha$ ($|\alpha|\ll 1$) получим, что правая часть (16) приближенно равна

$$\left[e^{(v\tau/h)^2}\right]^{(t-t_0)/2\tau}=e^{v^2\tau(t-t_0)/2h^2}.$$

Таким образом, если ограничить показатель степени небольшим числом, то ошибки округления, хоть и могут разрастаться, но не слишком сильно. Можно, например, положить

$$\frac{v^2\tau(t-t_0)}{2h^2}\leqslant 1,\quad \text{т. е.}\quad \tau\leqslant\frac{2h^2}{v^2(t-t_0)}.$$

Таким образом, описываемая схема, хоть и применима, но не очень удобна, так как если для улучшения аппроксимации дифференциального уравнения разностным мы уменьшим шаг h, то для соблюдения условия устойчивости нам придется уменьшать временнóй шаг τ еще более значительно, что приведет к резкому увеличению объема вычислений. Временной шаг приходится уменьшать и при увеличении интервала времени t, для которого строится решение.

Мы уже упоминали о том, что сама замена дифференциального уравнения разностным служит источником ошибки в решении, даже если вычисления производятся с как угодно высокой точностью. Можно показать, что если решение строится на конечном интервале времени, то эта ошибка в решении имеет тот же порядок, что ошибка в уравнении. Например, если в первой из разобранных схем считать h и τ одного порядка и заметить, что формулы (6) имеют погрешность 1-го порядка малости, то мы получаем, что отличие величины ϑ_{mn} от точного решения также имеет 1-й порядок малости. Поэтому для того, чтобы, например, повысить точность приближенного решения в 10 раз, надо уменьшить h и τ в 10 раз, что приведет к возрастанию вычислительной работы в 100 раз.

Для уменьшения объема вычислений можно воспользоваться более точными разностными схемами. Например, можно воспользоваться формулами

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{mn} \approx \frac{\vartheta_{m+1,\,n}-\vartheta_{m-1,\,n}}{2h}, \quad \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)_{mn} \approx \frac{\vartheta_{m,\,n+1}-\vartheta_{m,\,n-1}}{2\tau},$$

имеющими погрешность 2-го порядка малости. (Это легко получить, разложив правые части по формуле Тейлора вблизи точки x_m, t_n, что мы предоставляем читателю.) Тогда взамен (7) мы получим соотношение

$$v\frac{\vartheta_{m+1,\,n}-\vartheta_{m-1,\,n}}{2h}+\frac{\vartheta_{m,\,n+1}-\vartheta_{m,\,n-1}}{2\tau}=0, \qquad (17)$$

связывающее значения приближенного решения в четырех узлах, показанных на рис. 50. Это соотношение можно разрешить относительно значения в верхнем узле, в результате чего получится явная вычислительная схема.

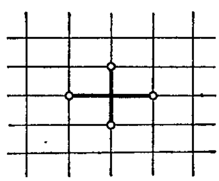

Рис. 50.

Отличием этой схемы от двух предыдущих является то, что для ее реализации требуется дополнительное знание искомого решения не на одном, как раньше, а на двух нижних временны́х слоях, т. е. не только при $n=0$, но и при $n=1$. Значения решения при $n=1$ можно определить по одной из двух предыдущих схем, что даст дополнительную ошибку 2-го порядка малости, которая для устойчивой вычислительной схемы не сможет в дальнейшем разрастись. Можно воспользоваться также тем, что заданное уравнение (5) (в общем случае — (1)) позволяет при известном $\vartheta|_{t=0}=\vartheta_0(x)$ вычислить

$$\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right|_{t=0}=-v\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right|_{t=0}=-v\vartheta_0'(x),$$

затем, с помощью дифференцирования по t, вычислить

$$\left.\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}\right|_{t=0} = -v\left.\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t\partial x}\right|_{t=0} = -v\frac{d}{dx}\left(\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right|_{t=0}\right) = v^2\vartheta_0''(x)$$

и т. д. (продумайте эти вычисления для уравнения (1)!). Отсюда, применив разложение в ряд Тейлора по t, можно получить значение $\vartheta|_{t=t_0+\tau}$ с высокой точностью, чтобы избежать дополнительного источника ошибок.

Проверим еще вычислительную схему (17) на устойчивость. Рассуждение, аналогичное проведенному для первой схемы, приводит взамен (13) к уравнению

$$v\frac{e^{i\gamma}-e^{-i\gamma}}{2h}+\frac{p-p^{-1}}{2\tau}=0, \quad \text{т. е.} \quad p^2+2i\frac{v\tau}{h}\sin\gamma\cdot p-1=0,$$

откуда

$$p_{1,2}=-i\frac{v\tau}{h}\sin\gamma\pm\sqrt{-\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2\sin^2\gamma+1}.$$

Таким образом, если $|v|\tau/h\leqslant 1$ (см. условие (10)), то подкоренное выражение положительно и потому

$$|p_{1,2}|^2=\left(-\frac{v\tau}{h}\sin\gamma\right)^2+\left(-\left(\frac{v\tau}{h}\right)^2\sin^2\gamma+1\right)=1,$$

т. е. вычислительная схема устойчива. Если $|v|\tau/h>1$, то при $\gamma=\frac{\pi}{2}$ одно из значений p получается по модулю большим единицы, т. е. вычислительная схема неустойчива.

Мы видели, что во всех рассмотренных нами явных вычислительных схемах для устойчивости требовалось выполнение определенного соотношения между шагами по x и по t. Применение неявных вычислительных схем представляет в этом отношении новые возможности. При этом разностная схема называется *неявной*, если на каждом следующем слое она приводит к соотношению между значениями искомого решения, из которого (соотношения) и надо эти значения найти.

В случае $v>0$ простейшая неявная схема получается с помощью замены

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{mn}\approx\frac{\vartheta_{mn}-\vartheta_{m-1,n}}{h}, \quad \left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\right)_{mn}\approx\frac{\vartheta_{mn}-\vartheta_{m,n-1}}{\tau},$$

которая приводит к разностному уравнению

$$v\frac{\vartheta_{mn}-\vartheta_{m-1,n}}{h}+\frac{\vartheta_{mn}-\vartheta_{m,n-1}}{\tau}=0, \tag{18}$$

связывающему значения приближенного решения в узлах сетки по схеме рис. 51. Подстановка в это уравнение выражения (12) приводит к равенству

$$v\frac{1-e^{-i\gamma}}{h}+\frac{1-p^{-1}}{\tau}=0,$$

из которого получаем

$$p=\left[1+\frac{v\tau}{h}(1-e^{-i\gamma})\right]^{-1}=\left[1+\frac{v\tau}{h}(1-\cos\gamma)+i\frac{v\tau}{h}\sin\gamma\right]^{-1},$$

откуда легко подсчитать

$$|p|^2=[1+2k+2k^2-(2k+2k^2)\cos\gamma]^{-1} \qquad \left(k=\frac{v\tau}{h}\right).$$

Отсюда, подобно первому из разобранных примеров, получаем, что $|p|$ заключено между 1 и $\left(1+\frac{v\tau}{h}\right)^{-1}$, т. е. рассматриваемая схема устойчива при л ю б о м соотношении между h и τ.

Впрочем, применение неявной схемы требует еще некоторых усилий при решении уравнения (18), точнее, системы уравнений (18) при зафиксированном n и всевозможных m. Например, при $n=1$ эта система принимает вид

$$-\frac{v}{h}\vartheta_{m-1,1}+\left(\frac{v}{h}+\frac{1}{\tau}\right)\vartheta_{m1}=\frac{1}{\tau}\vartheta_{m0}, \qquad (19)$$

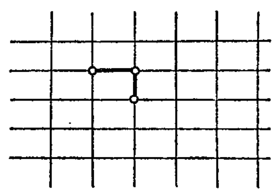

Рис. 51.

где правые части заданы в силу начального условия (9). Однако пусть начальная функция $\vartheta_0(x)$ отлична от нуля только при $x\geqslant 0$. Тогда (см. рис. 49) и решение равно нулю при $x\leqslant 0$, а потому $\vartheta_{m0}\equiv 0$ $(m<0)$. Полагая в соотношении (19) $m=0$, получим, что

$$\vartheta_{01}=\frac{\vartheta_{00}}{\tau}:\left(\frac{v}{h}+\frac{1}{\tau}\right); \qquad (20)$$

полагаем затем $m=1$, найдем

$$\vartheta_{11}=\left(\frac{1}{\tau}\vartheta_{10}+\frac{v}{h}\vartheta_{01}\right):\left(\frac{v}{h}+\frac{1}{\tau}\right),$$

куда надо подставить ϑ_{01} из (20), и т. д. Найдя значения ϑ_{m1} в требуемом диапазоне изменения x, можно положить в (18) $n=2$ и найти аналогичным образом значения ϑ_{m2} и т. д.

Как видим, применяя неявную схему вместо явной, приходится проводить некоторые добавочные вычисления. Несмотря на это, неявные схемы широко применяются, так как в них можно достичь экономии в вычислениях за счет не слишком малого τ, т. е. за счет уменьшения числа временны́х шагов.

Отметим, что для получения решения на очередном временно́м слое в неявной схеме требуется произвести рекуррентную цепочку вычислений; поэтому здесь также возникает вопрос об их устойчивости. Так, в разобранном примере ошибка $\Delta\vartheta_{01}$ в значении ϑ_{01}

распространяется «направо» по формуле $\Delta\vartheta_{m1}=q^m\Delta\vartheta_{01}$, где q в силу (19) удовлетворяет уравнению

$$-\frac{v}{h}q^{-1}+\left(\frac{v}{h}+\frac{1}{\tau}\right)=0, \quad \text{откуда} \quad q=\frac{v}{h}:\left(\frac{v}{h}+\frac{1}{\tau}\right).$$

Итак, $|q|<1$, а потому вычисления на каждом слое устойчивы.

Метод сеток для квазилинейных уравнений, рассмотренных в § 17, осложнен необходимостью предусмотреть явление перехлеста. Мы не будем рассматривать здесь этот метод, так как его более естественно излагать в связи с теорией взаимодействующих частиц.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 2

$$G(t;\ \vartheta)=\begin{cases} 0 & (-\infty<t<\vartheta), \\ \exp\left[-\int\limits_{\vartheta}^{t} b(s)\,ds\right] & (\vartheta<t<\infty) \end{cases} \quad (\vartheta>t_0),$$

$$G(t;\ \vartheta)=\begin{cases} -\exp\left[-\int\limits_{\vartheta}^{t} b(s)\,ds\right] & (-\infty<t<\vartheta), \\ 0 & (\vartheta<t<\infty) \end{cases} \quad (\vartheta<t_0);$$

$$x(t)=\int\limits_{t_0}^{t} G(t;\ \vartheta)\,\varphi(\vartheta)\,|\,d\vartheta\,|=\int\limits_{t_0}^{t}\varphi(\vartheta)\exp\left[-\int\limits_{\vartheta}^{t} b(s)\,ds\right]d\vartheta.$$

§ 3

1. $\vartheta(x,\ h)=e^x(1-v_0h)$, $\vartheta(x,\ 2h)=e^x(1-v_0h)^2$, вообще, $\vartheta(x,\ kh)=$ $=e^x(1-v_0h)^k$; полагая $kh=t$, т. е. $k=\frac{t}{h}$, получаем $\vartheta(x,\ t)=$ $=\lim\limits_{h\to 0}\left[e^x(1-v_0h)^{t/h}\right]=e^{x-v_0t}$, это и есть точное решение. Для произвольной функции $\vartheta_0(x)$ аналогично получаем по методу Эйлера значение $\vartheta(x,\ t)$ при $t=kh$ равным

$$\vartheta_0(x)-\frac{\vartheta_0'(x)}{1!}v_0t+\frac{\vartheta_0''(x)}{2!}v_0^2t(t-h)-\ldots+(-1)^k\frac{\vartheta_0^{(k)}(x)}{k!}v_0^kt(t-h)\ldots$$
$$\ldots[t-(k-1)h].$$

При $h\to 0$ в пределе получаем разложение функции $\vartheta_0(x-v_0t)$ в ряд Тейлора (если это разложение возможно!).

2. $\vartheta(x,\ t)=\sin k\left[(x+t+1)e^{-t}-1\right]$.

§ 4

$$\vartheta(x,\ t)=\left\{A\sin[\omega(x-v_0t)]+\frac{b}{a}(x-v_0t)+\frac{1}{a^2}(c+bv_0)\right\}e^{at}-$$
$$-\frac{1}{a}(bx+ct)-\frac{1}{a^2}(c+bv_0).$$