

распространяется «направо» по формуле $\Delta\vartheta_{m1} = q^m \Delta\vartheta_{01}$, где q в силу (19) удовлетворяет уравнению

$$-\frac{v}{h} q^{-1} + \left(\frac{v}{h} + \frac{1}{\tau} \right) = 0, \quad \text{откуда} \quad q = \frac{v}{h} : \left(\frac{v}{h} + \frac{1}{\tau} \right).$$

Итак, $|q| < 1$, а потому вычисления на каждом слое устойчивы.

Метод сеток для квазилинейных уравнений, рассмотренных в § 17, осложнен необходимостью предусмотреть явление перехлеста. Мы не будем рассматривать здесь этот метод, так как его более естественно излагать в связи с теорией взаимодействующих частиц.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 2

$$G(t; \vartheta) = \begin{cases} 0 & (-\infty < t < \vartheta), \\ \exp \left[- \int_{\vartheta}^t b(s) ds \right] & (\vartheta < t < \infty) \end{cases} \quad (\vartheta > t_0),$$

$$G(t; \vartheta) = \begin{cases} -\exp \left[- \int_{\vartheta}^t b(s) ds \right] & (-\infty < t < \vartheta), \\ 0 & (\vartheta < t < \infty) \end{cases} \quad (\vartheta < t_0);$$

$$x(t) = \int_{t_0}^t G(t; \vartheta) \varphi(\vartheta) |d\vartheta| = \int_{t_0}^t \varphi(\vartheta) \exp \left[- \int_{\vartheta}^t b(s) ds \right] d\vartheta.$$

§ 3

1. $\vartheta(x, h) = e^x (1 - v_0 h)$, $\vartheta(x, 2h) = e^x (1 - v_0 h)^2$, вообще, $\vartheta(x, kh) = e^x (1 - v_0 h)^k$; полагая $kh = t$, т. е. $k = \frac{t}{h}$, получаем $\vartheta(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} [e^x (1 - v_0 h)^{t/h}] = e^{x - v_0 t}$, это и есть точное решение. Для произвольной функции $\vartheta_0(x)$ аналогично получаем по методу Эйлера значение $\vartheta(x, t)$ при $t = kh$ равным

$$\vartheta_0(x) - \frac{\vartheta_0'(x)}{1!} v_0 t + \frac{\vartheta_0''(x)}{2!} v_0^2 t(t-h) - \dots + (-1)^k \frac{\vartheta_0^{(k)}(x)}{k!} v_0^k t(t-h) \dots \\ \dots [t - (k-1)h].$$

При $h \rightarrow 0$ в пределе получаем разложение функции $\vartheta_0(x - v_0 t)$ в ряд Тейлора (если это разложение возможно).

2. $\vartheta(x, t) = \sin k [(x + t + 1)e^{-t} - 1]$.

§ 4

$$\vartheta(x, t) = \left\{ A \sin[\omega(x - v_0 t)] + \frac{b}{a}(x - v_0 t) + \frac{1}{a^2}(c + bv_0) \right\} e^{at} - \\ - \frac{1}{a}(bx + ct) - \frac{1}{a^2}(c + bv_0).$$

§ 6

1. Характеристиками служат линии $x^2t=C$; при начальном условии $x(1)=x_1, \vartheta(1)=3x_1$ получаем вдоль характеристики $x=\frac{x_1}{\sqrt{t}}, \vartheta=3x_1(=const)$, откуда, исключая x_1 , находим искомое решение $\vartheta=3x\sqrt{t}$.

2. К уравнениям (6.9) и (6.10) надо присоединить равенства $F(x_1, t_1)=0$ и $\vartheta_1=\Phi(x_1, t_1)$, а затем из пяти полученных уравнений исключить четыре переменных q, t_1, x_1, ϑ_1 .

3. Дифференциальное уравнение характеристик $\frac{dx}{x}=\frac{dt}{t}$ имеет общее решение $x=Ct$, т. е. характеристиками служат лучи, выходящие из начала координат (рис. 52). Два из них касаются заданной линии в точках $A(2; -1)$ и $B(2; 1)$, которые разбивают линию на три дуги. На этих дугах (а также на любых их частях) и можно задавать искомое решение произвольно. Область влияния первой дуги на рис. 52 заштрихована.

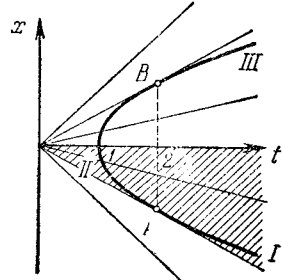


Рис. 52.

4. Заданное уравнение вдоль характеристик имеет вид $\frac{d\vartheta}{dt}=0$, откуда $\vartheta \equiv \vartheta_1$. Уравнение характеристики (см. решение задачи 3) при условии $x(t_1)=x_1$ имеет вид $x=\frac{x_1}{t_1}t$. Присоединяя равенства $t_1=1+x_1^2, \vartheta_1=t_1$ и исключая t_1, x_1, ϑ_1 , получаем искомое решение $\vartheta=t(2x^2)^{-1}(t+\sqrt{t^2-4x^2})$. Область влияния представляет собой угол $0 < x \leq \frac{t}{2} (0 < t < \infty)$. При приближении к нижней стороне угла $\vartheta \rightarrow \infty$, так как сюда сносятся большие значения ϑ , заданные на далекой части (\mathcal{L}). На верхней стороне угла $|\text{grad } u| = \infty$, так как в точке B на рис. 52 линия (\mathcal{L}) касается характеристики, а потому, если отойти от B вниз на малое расстояние h , изменение ϑ ,несенное с (\mathcal{L}), будет иметь порядок \sqrt{h} ; значит, $|\text{grad } \vartheta|$ имеет порядок $(\sqrt{h})'$, т. е. $h^{-1/2}$. При приближении к вершине угла ϑ имеет все предельные значения от 2 до ∞ , так как сюда сносятся все значения ϑ , заданные на (\mathcal{L}).

§ 7

1. В обозначениях § 1.7 $\rho(x, t)=\rho_0(\varphi(t_0; t, x))\varphi_x^2(t_0; t, x) + \int_{t_0}^t \rho_m(\varphi(\tau; t, x), \tau)\varphi_x'(\tau; t, x) d\tau$.

2. Для требуемого перехода надо в формуле (1.5.3) положить $f(x) = \varphi(t_0; t, x) - \xi$.

§ 8

1. В формуле (7.6) под знаком интеграла надо выполнить замену $\varphi(\tau; t, x) = s$, в результате чего интеграл примет вид $\int_{\xi}^x v'(s) \frac{ds}{v(s)} = \ln \frac{v(x)}{v(\xi)}$ и т. д.

2. а) Решение определяется формулами (8.2) и (8.3), в которых $\omega(x) = \frac{x}{v_0} + \frac{v_1}{v_0 \sqrt{v_0(v_0-v_1)}} \text{arctg} \frac{\sqrt{v_0}x}{\sqrt{v_0-v_1}}$. Функцию ξ аналитически выписать нельзя, но можно построить численно;

б) $w(x) = \frac{x}{v_0} + \frac{v_1}{2v_0 \sqrt{v_0(v_1-v_0)}} \ln \left| \frac{\sqrt{v_0}x - \sqrt{v_1-v_0}}{\sqrt{v_0}x + \sqrt{v_1-v_0}} \right|$, формула (8.3) действует на интервалах $-\infty < x < -\sqrt{1-\frac{v_1}{v_0}}$, $-\sqrt{1-\frac{v_1}{v_0}} < x < \sqrt{1-\frac{v_1}{v_0}}$, $\sqrt{1-\frac{v_1}{v_0}} < x < \infty$;

в) $w(x) = -\frac{x}{v_1} - \frac{x^3}{3v_1}$; здесь функцию ξ можно выписать аналитически с помощью формулы Кардано для решения кубического уравнения.

3. Продифференцировав формулу (8.2) по x при $\rho_0(x) \equiv \text{const}$ с помощью формулы (8.3) и приравняв результат нулю, приходим к требуемому уравнению $v'(\xi(w(x)-t+t_0)) = v'(x)$. Отсюда видно, в частности, что рассматриваемые экстремумы могут быть только на тех интервалах между соседними нулями функции $v(x)$, где она имеет точки перегиба.

4. При малых $t-t_0$ с точностью до малых высшего порядка будет $\xi(w(x)-(t-t_0)) = x-v(x)(t-t_0)$; это вытекает из смысла левой части, но можно вывести и формально, с помощью формулы Тейлора. Из (8.2) следует, что с точностью до малых высшего порядка

$$\rho(x, t) = \frac{1}{v(x)} [v(x) - v'(x) \cdot v(x)(t-t_0)] [\rho_0(x) - \rho'_0(x) \cdot v(x)(t-t_0)] = \\ = \rho_0(x) - [\rho_0(x) v(x)]'(t-t_0)$$

Впрочем, и этому результату нетрудно дать непосредственное истолкование.

§ 9

Переписав уравнение в виде $x\vartheta'_x - 2t\vartheta'_t = \vartheta$, аналогично упражнению 6.1 находим решение $\vartheta = 3x$. Так как $\Phi_1(t) = 0$, $\Phi_2(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$, то «масса» (9.6) между движущимися точками равна

$$M = \int_0^{1/\sqrt{t}} (-2t \cdot 3x) dx = -3,$$

т. е. не зависит от t .

§ 10

1. Здесь $x = \xi + \frac{t}{1+\xi^2}$; чтобы выразить $\xi(x, t)$, надо было бы решить кубическое уравнение; его графическое решение в равносильной форме $\frac{x-\xi}{t} = \frac{1}{1+\xi^2}$ показано на рис. 53. Параметрические уравнения каустики в силу (10.3) имеют вид

$$x = \xi - \frac{(1+\xi^2)^{-1}}{-2\xi(1+\xi^2)^{-2}} = \frac{1}{2\xi}(1+3\xi^2), \quad t = \frac{1}{2\xi}(1+\xi^2)^2.$$

Из уравнения (10.4) находим $\xi_{кр} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, откуда $t_{кр} = \frac{8}{9} \sqrt{3} = 1,54$, $x_{кр} = \sqrt{3} = 1,73$. При $0 \leq t \leq t_{кр}$

$$\rho = \rho_0 \left(\frac{dx}{d\xi} \right)^{-1} = \rho_0 \left(1 - \frac{2t\xi}{(1+\xi^2)^2} \right)^{-1} \quad (1)$$

чтобы получить $\rho(x, t)$, надо сюда подставить $\xi = \xi(x, t)$. Для $t = t_{кр}$ при $x = x_{кр}$ возникает точечное уплотнение, расщепляющееся затем на два, между которыми образуется складка среды. Плотность среды получается в результате наложения плотностей трех ее слоев, причем при вычислении плотности среднего слоя в правой части (1) надо поставить знак абсолютной величины.

2. Здесь $x = \xi + \xi^2 t^2$, т. е. характеристиками служат параболы (рис. 54). Уравнение каустики получается с помощью дифференцирования по параметру

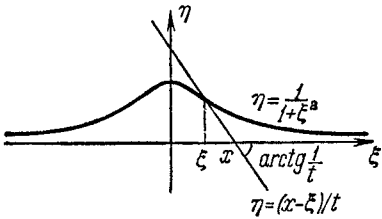


Рис. 53.

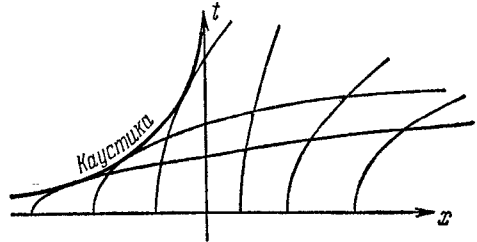


Рис. 54.

ξ ; $0 = 1 + 2\xi t^2$, откуда $\xi = -\frac{1}{2t^2}$, $x = -\frac{1}{4t^2}$. Таким образом, далекие частицы столь стремительно идут вперед, что при любом $t > 0$ полосу $-\frac{1}{4t^2} \leq x < \infty$ оказывается покрытой двумя слоями частиц,

$$\xi_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4t^2 x}}{2t^2}.$$

Плотность

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \rho_0 \left(\left| \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_1}^{-1} + \left| \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_2}^{-1} \right) = \\ &= \rho_0 (|1 + 2t^2 \xi_1|^{-1} + |1 + 2t^2 \xi_2|^{-1}) = \frac{2\rho_0}{\sqrt{1 + 4t^2 x}}. \end{aligned}$$

В точке «заворота» среды, т. е. на каустике плотность обращается в бесконечность.

3. Перехлест возникает при $x=0$, $t=t_0+1/|v'(0)|$.

4. Для всех точек перегиба значение v одинаковое; но при $t=t_{кр}$ оно равно $v_{кр}$, а потому и при $t=t_0$ оно равно $v_{кр}$, т. е. $v_{кр}$ определяется из равенств $v=v(\xi)$, $v'(\xi)=0$.

§ 11

1. $\mu = \rho_0 \cdot (\xi_2 - \xi_1)$; $u = \xi_i + \frac{t}{1 + \xi_i^2}$, откуда $\xi'_i = \frac{(1 + \xi_i^2) u' - 1}{1 + 3\xi_i^2 - 2u\xi_i}$ ($i=1, 2$).

Из закона сохранения количества движения $[(\xi_2 - \xi_1) u']' = \frac{\xi'_2}{1 + \xi_2^2} - \frac{\xi'_1}{1 + \xi_1^2}$, откуда $(\xi_2 - \xi_1) u' = \arctg \xi_2 - \arctg \xi_1$ (постоянная интегрирования равна нулю). Подставляя сюда выражение для u , получаем систему дифференциальных уравнений

$$\frac{d\xi_i}{dt} = \frac{(1 + \xi_i^2)^2}{(1 + \xi_i^2)^2 - 2t\xi_i} \left(\frac{\arctg \xi_2 - \arctg \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} - \frac{1}{1 + \xi_i^2} \right) \quad (i=1, 2),$$

которую надо решать при начальном условии $\xi_1 \left(\frac{8}{9} \sqrt{3} \right) = \xi_2 \left(\frac{8}{9} \sqrt{3} \right) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (см. решение задачи 10.1).

2. В силу соображений симметрии сгусток возникает при $x=0$ в момент $t = t_0 + 1/|v'(0)|$ и там остается. Функции $\xi_{1,2}(t)$ определяются из уравнения $\xi + v(\xi)(t - t_0) = 0$.

§ 12

$$1. \rho = \begin{cases} \rho_0 \{1 - A(1 - \alpha)(t - t_0)|x|^{-(1-\alpha)}\}^{\alpha/(1-\alpha)} & (|x| \geq \{A(1 - \alpha)(t - t_0)\}^{1/(1-\alpha)}), \\ 0 & (|x| \leq \{A(1 - \alpha)(t - t_0)\}^{1/(1-\alpha)}). \end{cases}$$

$$2. \rho = \{m_0 - h(t - t_0)\} \delta(x) + \begin{cases} hw_0^{-1} & (0 \leq x \leq v_0(t - t_0)), \\ 0 & (x \leq 0, x \geq v_0(t - t_0)) \end{cases}$$

$$\left(t_0 \leq t \leq t_0 + \frac{m_0}{h} \right),$$

$$\rho = \begin{cases} hw_0^{-1} & \left(v_0 \left(t - t_0 - \frac{m}{h} \right) \leq x \leq v_0(t - t_0) \right), \\ 0 & \left(x \leq v_0 \left(t - t_0 - \frac{m}{h} \right), x \geq v_0(t - t_0) \right) \end{cases} \quad \left(t \geq t_0 + \frac{m_0}{h} \right).$$

3. Для всех $t \geq t_0$ справедливо первое выражение для ρ из предыдущего ответа.

§ 13

Указанное условие квазистационарности для вещественного отрицательного $\rho = -|\rho|$ имеет вид $mp^2 \leq 0,1\lambda|\rho|$, где $mp^2 + \lambda\rho + k = 0$. Приняв первое неравенство за равенство и исключая ρ , получим $m = 0,09\lambda^2 k^{-1}$. Значит, условие квазистационарности имеет вид $m \leq 0,09\lambda^2 k^{-1}$ или, проще, $m \leq 0,1\lambda^2 k^{-1}$ ($= 0,1\lambda T$, ср. условие (13.6)). Решение при заданных начальных условиях

$$x(t) = \frac{x_0}{2\mu} \left[(\lambda + \mu) \exp\left(-\frac{\lambda - \mu}{2m} t\right) - (\lambda - \mu) \exp\left(-\frac{\lambda + \mu}{2m} t\right) \right],$$

где обозначено $\mu = \sqrt{\lambda^2 - 4mk}$. Отсюда при малых m

$$x(t) \approx x_0 \left[\exp\left(-\frac{k}{\lambda} t\right) - \frac{mk}{\lambda^2} \exp\left(-\frac{\lambda}{m} t\right) \right].$$

Условие $\lambda \dot{x}(\tau) = 0,9kx(\tau)$, определяющее время релаксации, приобретает вид $1 - \exp\left(\frac{k}{\lambda} - \frac{\lambda}{m}\right)\tau = 0,9$, откуда

$$\tau = 2,3 \left(\frac{\lambda}{m} - \frac{k}{\lambda} \right)^{-1} \approx 2,3 \frac{m}{\lambda} = 2,3 \frac{mk}{\lambda^2} T.$$

В силу условия квазистационарности коэффициент при T , во всяком случае, не превосходит 0,2, а при малом m он как угодно мал.

§ 14

$$1. a = 0, \quad b = \frac{E}{g}, \quad v_+(x) = \sqrt{2E - 2gx}, \quad w_+(x) = -\frac{1}{g} \sqrt{2E - 2gx}$$

$$(0 \leq x \leq b), \quad \xi_+(t) = b - \frac{1}{2} gt^2 \quad \left(-\frac{\sqrt{2E}}{g} \leq t \leq 0 \right); \text{ за пределами указанных}$$

интервалов функции продолжаются, как описано в § 14, после чего можно применить формулы (14.5) и (14.6). Интересной особенностью данного примера является то, что при $x=a(=0)$ скорость частиц не обращается в нуль, а мгновенно сменяет значение $\sqrt{2E}$ на $-\sqrt{2E}$ (графики $v_+(x)$ и $v_-(x)$ после их продолжения на всю ось x показаны на рис. 55 соответственно сплошной и пунктирной линиями); поэтому и плотность среды при $x=a$ остается конечной.

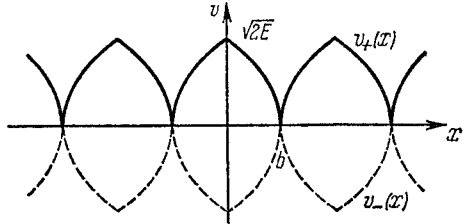


Рис. 55.

$$2. \rho_{\pm}(x) = \frac{M}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{2E - kx^2}}$$

§ 15

1. Искомая разность потенциалов равна

$$\int_0^l 2\pi (|x_2 - x| - |x_1 - x|) \rho(x) dx = 2\pi j \sqrt{\frac{ml}{2e\varphi_A}} \int_0^l \frac{|x_2 - x| - |x_1 - x|}{\sqrt{x}} dx.$$

Представляя последний интеграл в виду суммы $\int_0^{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} + \int_{x_2}^l$, получаем, что он равен $\left(\frac{8}{3} x^{3/2} - 2\sqrt{lx}\right)\Big|_{x=x_1}^{x_2}$. Функция, стоящая в скобках, для $0 \leq x \leq h$ имеет минимальное значение $-\frac{1}{6} l^{3/2}$ при $x = \frac{l}{4}$ и максимальное значение $\frac{2}{3} l^{3/2}$ при $x=l$. Значит, разность потенциалов будет максимальной при $x_1 = \frac{l}{4}$, $x_2 = l$, причем это максимальное значение равно

$$2\pi j \sqrt{\frac{ml}{2e\varphi_A}} \cdot \frac{5}{6} l^{3/2} = \frac{5}{3} \pi j h^2 \sqrt{\frac{m}{2e\varphi_A}}$$

2. В общем случае решение получается в неявной форме

$$\pm \int_{y_0}^y (2e^y - 2e^{y_0} + y_0'^2)^{-1/2} dy = x - x_0,$$

где знак перед интегралом совпадает со знаком y_0' . Этот интеграл, вообще говоря, не выражается через элементарные функции, кроме специальных комбинаций начальных данных. В частности, при $x_0=0$, $y_0=0$, $y_0' = \sqrt{2}$ он равен $\sqrt{2}(1 - e^{-y/2})$, откуда получаем требуемое частное решение $y = -2 \ln(1 - x/\sqrt{2})$.

§ 17

1. Перепишем систему уравнений (17.6) в виде

$$\frac{dx}{dq} = a(x, t, \vartheta), \quad \frac{dt}{dq} = b(x, t, \vartheta), \quad \frac{d\vartheta}{dq} = g(x, t, \vartheta)$$

и обозначим через

$$x = \varphi_1(q; x_0, t_0, \vartheta_0), \quad t = \varphi_2(\dots), \quad \vartheta = \varphi_3(\dots) \quad (2)$$

решение этой системы при начальных условиях $x(0) = x_0, t(0) = t_0, \vartheta(0) = \vartheta_0$. Пусть начальное условие (линия (\mathcal{L}') на рис. 47) задано в параметрическом виде

$$x_0 = \alpha_1(\rho), \quad t_0 = \alpha_2(\rho), \quad \vartheta_0 = \alpha_3(\rho). \quad (3)$$

Тогда искомое решение получится, если из шести равенств (2), (3) исключить пять параметров $q, x_0, t_0, \vartheta_0, \rho$.

2. Система уравнений характеристик $\frac{dx}{dt} = \vartheta, \frac{d\vartheta}{dt} = 0$ при начальных условиях $x(t_0) = x_0, \vartheta(t_0) = \vartheta_0$ имеет решение $x = \vartheta_0(t - t_0) + x_0, \vartheta = \vartheta_0$. Начальное условие в формулировке упражнения запишем в виде $t_0 = 0, \vartheta_0 = ax_0$, после чего исключим t_0, x_0, ϑ_0 ; это даст искомое решение $\vartheta = \frac{ax}{1+at}$. При $a > 0$ решение определено для всех $t \geq 0$, тогда как при $a < 0$ решение при $t = \frac{1}{|a|} - 0$ обращается в бесконечность. Если, далее, считать, что ϑ играет роль ρ в уравнении (17.8) (не требуя положительности этой величины), то $u = \frac{1}{2}\vartheta$, откуда уравнение «движения частиц» имеет вид $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{ax}{1+at}$ и

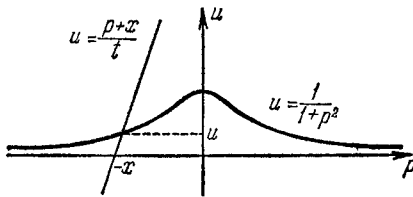


Рис. 56.

общее решение $x = x_0 \sqrt{1+at}$. Аналог закона сохранения числа частиц:

$$x_2(t) \int_{x_1(t)}^{x_2(t)} \vartheta(t, x) dx = \text{const}; \quad \text{проверка:}$$

$$x_2 \sqrt{1+at} \int_{x_1 \sqrt{1+at}}^{x_2 \sqrt{1+at}} \frac{ax}{1+at} dx = \frac{a}{2} (x_2^2 - x_1^2), \quad \text{ре-}$$

зультат не зависит от t .

3. Аналогично уравнению 2 получаем, что искомое решение $\vartheta(x, t)$ мож-

но найти как решение уравнения $\vartheta = \frac{1}{1+(\vartheta t - x)^2}$; обозначая $\vartheta t - x = \rho$, полу-

чаем, что $\vartheta = \frac{\rho+x}{t}$, где ρ удовлетворяет уравнению $\frac{\rho+x}{t} = \frac{1}{1+\rho^2}$, геометрический смысл которого показан на рис. 56. Так как максимальное значение

производной u функции $\vartheta = \frac{1}{1+\rho^2}$ равно $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ и достигается при

$\rho = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, то решение строится однозначно и непрерывно при $0 \leq t \leq$

$\leq \frac{8}{3\sqrt{3}} = 1,54$, после чего возникает перегиб, начиная от значения $x = \sqrt{3}$.