ГЛАВА III

ДВИЖЕНИЯ С ЗАДАННЫМИ СКОРОСТЯМИ В ПРОСТРАНСТВЕ

Задача о построении среды из частиц, движущихся с заданными скоростями на плоскости или в пространстве, аналогична соответствующей задаче на прямой, рассмотренной в гл. II. Поэтому здесь мы будем проводить рассмотрение более кратко, задерживаясь лишь на существенно новых моментах. Для определенности будем говорить о движении среды в пространстве, так как рассмотрение плоских движений проводится аналогично.

Отметим, что теория плоских движений окажется полезной в гл. IV для исследования одномерных движений с помощью вспомогательной фазовой плоскости.

§ 1. Введение

Будем считать, что в пространстве введена декартова система координат x, y, z, и обозначим радиус-вектор произвольной точки $P(x;\ y;\ z)$ буквой $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$, где $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ — единичные векторы, параллельные осям координат. Как и в § II.1, возможны две постановки задачи о построении среды из частиц, движущихся с заданными скоростями. В первой постановке скорость задается как функция лагранжевых координат

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{F}(t;\ \boldsymbol{r}_0),$$

где

$$\boldsymbol{r}_0=\xi\boldsymbol{i}+\eta\boldsymbol{j}+\zeta\boldsymbol{k}\ (=x_0\boldsymbol{i}+y_0\boldsymbol{j}+z_0\boldsymbol{k})=\boldsymbol{r}\,|_{t=t_0}. \tag{1}$$

Здесь закон движения частицы имеет вид

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{F}(t;\ \boldsymbol{r}_0)\,dt.$$

Во второй постановке скорость задается как функция эйлеровых координат

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{f}\ (\boldsymbol{r},\ t). \tag{2}$$

Здесь для построения закона движения частицы надо решить векторное дифференциальное уравнение (2) при начальном условии (1); проектируя это уравнение на оси координат, можно перейти к равносильной системе из трех скалярных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=f_x(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt}=f_y(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt}=f_z(x, y, z, t), \tag{3}$$

где $\boldsymbol{f}=f_x\boldsymbol{i}+f_y\boldsymbol{j}+f_z\boldsymbol{k}$ *), и к соответствующим начальным условиям

$$x|_{t=t_0}=x_0, \quad y|_{t=t_0}=y_0, \quad z|_{t=t_0}=z_0. \tag{4}$$

Система уравнений (3) интегрируется в явном виде практически только в случае, когда правые части линейны относительно x, y, z с коэффициентами, не зависящими от t. Если к тому же свободные члены отсутствуют, то система (3) имеет вид

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{dt}&=a_1x+b_1y+c_1z,\\ \frac{dy}{dt}&=a_2x+b_2y+c_2z,\\ \frac{dz}{dt}&=a_3x+b_3y+c_3z. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Подобные системы рассмотрены в ЭПМ, § VIII.3. Частные решения системы (5) ищутся в виде

$$x=\lambda e^{pt}, \quad y=\mu e^{pt}, \quad z=\nu e^{pt}; \tag{6}$$

при этом оказывается, что p должно удовлетворять характеристическому уравнению

$$\begin{vmatrix} a_1-p & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2-p & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3-p \end{vmatrix}=0. \tag{7}$$

Каждому корню p уравнения (7) отвечает решение вида (6) системы (5). Поэтому, если все корни уравнения (7) различны, то мы получаем три частных решения этой системы; общее решение получается из них в виде линейной комбинации с произвольными постоянными коэффициентами, которые можно определить с помощью начальных условий (4). (Если p — кратный корень уравнения (7), то в решении (6) коэффициенты λ, μ, ν надо заменить на многочлены по t, степень которых на единицу меньше этой кратности, с неопределенными коэффициентами, которые находят, подставив формулы для решения в уравнения (5).)

Если в уравнениях системы (5) присутствуют еще свободные члены — известные функции t, то эту систему можно решить либо

*) Не следует путать обозначения, которыми мы пользуемся в этой книге f_x — проекция вектора $\boldsymbol{f}$ на ось x и f'_x — частная производная от скалярной функции f по x.

по методу вариации произвольных постоянных, либо с помощью построения функции влияния, как в § II.2. Здесь мы не будем на этом останавливаться.

В гл. II, при рассмотрении движения частиц по оси x, графиками законов этого движения служили линии $x=x(t)$ в плоскости x, t. Аналогично, при движении частиц в плоскости x, y графиками законов этого движения служат линии, определяющиеся уравнением $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ (т.е. $x=x(t)$, $y=y(t)$) в трехмерном пространстве x, y, t. На рис. 57 изображен один из таких графиков; его проекция на плоскость x, y дает траекторию соответствующей частицы. Такие графики заполняют все пространство x, y, t, так что через каждую точку этого пространства проходит ровно одна линия.

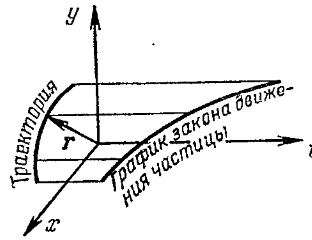

Рис. 57.

При рассмотрении пространственного движения частиц с непривычки возникает некоторая трудность с геометрической интерпретацией графиков законов движения частиц, так как здесь уже четыре переменных: x, y, z, t. Однако мы уже упоминали в ЭПМ, § IV.8, что можно рассматривать ч е т ы р е х м е р н о е пространство (4-пространство) x, y, z, t, условившись считать, что каждый набор значений (x; y; z; t) определяет точку в этом пространстве. При таком подходе график $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ (т. е. $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$) будет представлять собой линию в 4-пространстве, проекция которой на 3-пространство x, y, z — это траектория частицы. Соответствующую картину нетрудно нарисовать в проекции на двумерную плоскость, для этого достаточно просто на рис. 57 изобразить еще одну ось, проходящую через точку O, обозначив эту ось буквой z. (Ведь и рис. 57 получается в результате проектирования трехмерного пространства на плоскость.) Через каждую точку 4-пространства проходит ровно одна линия, изображающая закон движения частицы.

Что касается вопроса о том, каким образом задается скорость движения частиц, то, как и в гл. II, проще всего представлять себе, что эта скорость определяется работой специально запрограммированных моторчиков, расположенных либо на самих частицах (если скорость задается в лагранжевых координатах), либо в неподвижном пространстве (если в эйлеровых). Тот же результат получится при рассмотрении квазистационарных движений (см. § II.13).

Упражнения

1. Найдите решение системы уравнений $\frac{dx}{dt}=x-y$, $\frac{dy}{dt}=-4x+y$, удовлетворяющее начальным условиям $x|_{t=0}=0$, $y|_{t=0}=4$.

2. Применив функцию влияния, найдите решение системы уравнений $\frac{dx}{dt}=y+\varphi(t)$, $\frac{dy}{dt}=-x+\psi(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $x|_{t=0}=y|_{t=0}=0$.

§ 2. Построение локального параметра среды

Это построение осуществляется совершенно аналогично одномерному случаю, в силу чего остановимся на нем совсем кратко. Будем для определенности говорить о температуре $\vartheta=\vartheta(\boldsymbol{r}, t)$ среды в точке с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ в момент t. Если температура малых порций среды в процессе ее эволюции не меняется, то уравнение процесса в лагранжевых координатах имеет вид

$$\frac{d\vartheta}{dt}=0 \tag{1}$$

и при начальном условии

$$\vartheta|_{t=t_0}=\vartheta_0(\boldsymbol{r}_0) \tag{2}$$

имеет решение

$$\vartheta(\boldsymbol{r}_0, t)\equiv\vartheta_0(\boldsymbol{r}_0). \tag{3}$$

В эйлеровых координатах уравнение (1) имеет вид (см. формулы (I.4.2), (I.4.3) и (1.2))

$$f_x(x, y, z, t)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+f_y(x, y, z, t)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+f_z(x, y, z, t)\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=0$$

или, в векторной записи,

$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, t)\cdot\nabla)\,\vartheta+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=0. \tag{4}$$

Чтобы переписать решение (3) в эйлеровых координатах, обозначим через

$$\boldsymbol{r}=\varphi(t;\ t_1,\ \boldsymbol{r}_1) \tag{5}$$

решение уравнения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{r}|_{t=t_1}=\boldsymbol{r}_1$. Тогда лагранжевы координаты связаны с эйлеровыми по формулам

$$\boldsymbol{r}=\varphi(t;\ t_0,\ \boldsymbol{r}_0),\quad \boldsymbol{r}_0=\varphi(t_0;\ t,\ \boldsymbol{r}) \tag{6}$$

и потому решение (3) в эйлеровых координатах приобретает вид

$$\vartheta(\boldsymbol{r}, t)=\vartheta_0(\varphi(t_0;\ t,\ \boldsymbol{r}))$$

(сравните с формулой (II.3.10)).

Если температура ϑ малых порций среды не сохраняется, но эти порции между собой не взаимодействуют, то взамен (1) получается дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\vartheta}{dt}=h(t, \vartheta;\ \boldsymbol{r}_0), \tag{7}$$