2. Применив функцию влияния, найдите решение системы уравнений $\frac{dx}{dt}=y+\varphi(t)$, $\frac{dy}{dt}=-x+\psi(t)$, удовлетворяющее начальным условиям $x|_{t=0}=y|_{t=0}=0$.

§ 2. Построение локального параметра среды

Это построение осуществляется совершенно аналогично одномерному случаю, в силу чего остановимся на нем совсем кратко. Будем для определенности говорить о температуре $\vartheta=\vartheta(\boldsymbol{r},\ t)$ среды в точке с радиусом-вектором $\boldsymbol{r}$ в момент t. Если температура малых порций среды в процессе ее эволюции не меняется, то уравнение процесса в лагранжевых координатах имеет вид

$$\frac{d\vartheta}{dt}=0 \tag{1}$$

и при начальном условии

$$\vartheta|_{t=t_0}=\vartheta_0(\boldsymbol{r}_0) \tag{2}$$

имеет решение

$$\vartheta(\boldsymbol{r}_0,\ t)\equiv\vartheta_0(\boldsymbol{r}_0). \tag{3}$$

В эйлеровых координатах уравнение (1) имеет вид (см. формулы (I.4.2), (I.4.3) и (1.2))

$$f_x(x,\ y,\ z,\ t)\frac{\partial\vartheta}{\partial x}+f_y(x,\ y,\ z,\ t)\frac{\partial\vartheta}{\partial y}+f_z(x,\ y,\ z,\ t)\frac{\partial\vartheta}{\partial z}+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=0$$

или, в векторной записи,

$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},\ t)\cdot\nabla)\,\vartheta+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=0. \tag{4}$$

Чтобы переписать решение (3) в эйлеровых координатах, обозначим через

$$\boldsymbol{r}=\varphi(t;\ t_1,\ \boldsymbol{r}_1) \tag{5}$$

решение уравнения (1.2), удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{r}|_{t=t_1}=\boldsymbol{r}_1$. Тогда лагранжевы координаты связаны с эйлеровыми по формулам

$$\boldsymbol{r}=\varphi(t;\ t_0,\ \boldsymbol{r}_0),\quad \boldsymbol{r}_0=\varphi(t_0;\ t,\ \boldsymbol{r}) \tag{6}$$

и потому решение (3) в эйлеровых координатах приобретает вид

$$\vartheta(\boldsymbol{r},\ t)=\vartheta_0(\varphi(t_0;\ t,\ \boldsymbol{r}))$$

(сравните с формулой (II.3.10)).

Если температура ϑ малых порций среды не сохраняется, но эти порции между собой не взаимодействуют, то взамен (1) получается дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d\vartheta}{dt}=h(t,\ \vartheta;\ \boldsymbol{r}_0), \tag{7}$$

которое надо решить при начальном условии (2), считая $\boldsymbol{r}_0$ зафиксированным (параметром), чтобы получить закон изменения $\vartheta(t)$ для частицы, отвечающей выбранному значению $\boldsymbol{r}_0$.

Если скорость изменения температуры задается в эйлеровых координатах, то взамен (4) получаем уравнение

$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}, t)\cdot\nabla)\,\vartheta+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=g(\boldsymbol{r},\ t,\ \vartheta). \tag{8}$$

После перехода к лагранжевым координатам имеем уравнение

$$\frac{d\vartheta}{dt}=g(\varphi(t;\ t_0,\ \boldsymbol{r}_0),\ t,\ \vartheta),$$

которое надо решить при начальном условии (2), после чего совершить обратную подстановку $\boldsymbol{r}_0=\varphi(t_0;\ t,\ \boldsymbol{r})$.

Линии (5) в 4-мерном пространстве аргументов x, y, z, t, т. е. интегральные линии уравнения (1.2), называются *характеристиками* уравнений с частными производными 1-го порядка (4) и (8); другими словами, это линии, изображающие законы движения отдельных частиц. Как видим, вдоль характеристики почти линейное уравнение с частными производными 1-го порядка превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, что и дает возможность произвести интегрирование.

Если скорость частиц зависит от их температуры, то взамен (8) получаем *квазилинейное* уравнение

$$(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},\ t,\ \vartheta)\cdot\nabla)\,\vartheta+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=g(\boldsymbol{r},\ t,\ \vartheta). \tag{9}$$

Характеристиками этого уравнения (сравните § II.17) служат линии в 5-мерном пространстве аргументов-функции, определяемые системой дифференциальных уравнений

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r},\ t,\ \vartheta),\qquad \frac{d\vartheta}{dt}=g(\boldsymbol{r},\ t,\ \vartheta). \tag{10}$$

Каждая интегральная 4-поверхность $\vartheta=\vartheta(\boldsymbol{r}, t)$ уравнения (9) целиком составлена из таких характеристик. Чтобы получить интегральную поверхность, удовлетворяющую начальному условию (2), нужно провести характеристику через каждую точку 3-мерной поверхности с уравнением (2) в 5-мерном пространстве.

Упражнения

1. Пусть $h(t,\ \vartheta,\ \boldsymbol{r}_0)=\alpha t+\beta\vartheta+\gamma x_0+\delta z_0$, $\vartheta_0(\boldsymbol{r}_0)=ax_0+by_0$; найдите $\vartheta(\boldsymbol{r}_0,\ t)$.

2. Пусть $g(\boldsymbol{r},\ t,\ \vartheta)\equiv 0$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},\ t)=(x-z)\,\boldsymbol{i}+(-4x+z)\,\boldsymbol{k}$, $\vartheta_0(\boldsymbol{r}_0)=x_0$, $t_0=0$. Найдите $\vartheta(\boldsymbol{r},\ t)$.

3. Опишите аналитически процедуру решения уравнения (9) при начальном условии (2).