§ 3. Отыскание плотности 3-мерной среды

В силу § I.8 уравнение неразрывности в пространстве имеет вид

$$\operatorname{div}(\rho \boldsymbol{v}) + \rho_t' = 0 \qquad (1) = (I.8.4)$$

или, что то же,

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \boldsymbol{v}. \qquad (2)$$

Отсюда, разделяя переменные, при начальном условии

$$\rho\,|_{t=t_0} = \rho_0(\boldsymbol{r}_0) \qquad (3)$$

получаем

$$\rho = \rho_0(\boldsymbol{r}_0) \exp\left[-\int_{t_0}^{t} (\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{s}, \tau))_{\boldsymbol{s}=\varphi(\tau;\, t_0,\, \boldsymbol{r}_0)}\, d\tau\right], \qquad (4)$$

где функция φ была определена в § 2.

Этот результат можно записать в ином виде, заметив, что если масса порций среды не меняется, то увеличение плотности должно быть обратно пропорциональным локальному увеличению объема. Однако последнее в силу § I.4 (см., в частности, упражнение (I.4.1)) равно якобиану

$$\frac{D(x, y, z)}{D(x_0, y_0, z_0)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial x_0 & \partial y/\partial x_0 & \partial z/\partial x_0 \\ \partial x/\partial y_0 & \partial y/\partial y_0 & \partial z/\partial y_0 \\ \partial x/\partial z_0 & \partial y/\partial z_0 & \partial z/\partial z_0 \end{vmatrix},$$

который мы для краткости будем обозначать через $D\boldsymbol{r}/D\boldsymbol{r}_0$. Таким образом,

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = \rho_0(\boldsymbol{r}_0)\left(\frac{D\boldsymbol{r}}{D\boldsymbol{r}_0}\right)^{-1} = \rho_0(\boldsymbol{r}_0)\frac{D\boldsymbol{r}_0}{D\boldsymbol{r}}. \qquad (5)$$

Конечно, здесь якобиан зависит не только от $\boldsymbol{r}_0$, но и от t. Чтобы выразить ответ через эйлеровы координаты, надо еще подставить $\boldsymbol{r}_0 = \varphi(t_0;\, t, \boldsymbol{r})$, $\dfrac{D\boldsymbol{r}_0}{D\boldsymbol{r}} = \dfrac{D\varphi(t_0;\, t, \boldsymbol{r})}{D\boldsymbol{r}}$.

Сравнивая равенства (4) с (5), мы приходим к формуле

$$\frac{D\boldsymbol{r}}{D\boldsymbol{r}_0} = \exp\int_{t_0}^{t} (\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{s}, \tau))_{\boldsymbol{s}=\varphi(\tau;\, t_0,\, \boldsymbol{r}_0)}\, d\tau, \qquad (6)$$

связывающей якобиан деформации среды (т. е. коэффициент искажения объемов) с дивергенцией скорости. После логарифмирования и дифференцирования ту же формулу можно переписать так:

$$\frac{d}{dt}\frac{D\boldsymbol{r}}{D\boldsymbol{r}_0} = \frac{D\boldsymbol{r}}{D\boldsymbol{r}_0}\operatorname{div} \boldsymbol{v}.$$

Из формулы (6) вытекает, в частности, что если поле скоростей $\boldsymbol{v}$ задается как однозначная функция эйлеровых координат, то $\frac{Dr}{Dr_0} > 0$ *).

Приведем непосредственный вывод формулы (6), причем для простоты выкладок будем рассматривать плоские движения. Для этого нам понадобится следующая *формула Абеля—Лиувилля—Остроградского*, связывающая любые два решения $(u_1(t),\ v_1(t))$ и $(u_2(t),\ v_2(t))$ линейной системы дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\dot{u} = a(t)\,u + b(t)\,v, \quad \dot{v} = c(t)\,u + g(t)\,v: \tag{7}$$

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} = Ce^{\int [a(t)+g(t)]\,dt}. \tag{8}$$

Определитель, стоящий в левой части, составленный из решений системы (7), называется *определителем Вронского* или *вронскианом*.

Для доказательства этой формулы обозначим левую часть буквой D и продифференцируем ее по t:

$$\dot{D} = (u_1v_2 - u_2v_1)^{\cdot} = \dot{u}_1v_2 + u_1\dot{v}_2 - \dot{u}_2v_1 - u_2\dot{v}_1 = (au_1 + bv_1)v_2 + \ldots$$

Приведение подобных членов, которое мы предоставляем читателю, приводит к равенству $\dot{D} = (a+g)\,(u_1v_2 - u_2v_1) = (a+g)\,D$, откуда $\frac{\dot{D}}{D}\,a(t)+g(t)$. Интегрируя, приходим к формуле (8). Аналогичная формула справедлива для линейных систем дифференциальных уравнений 1-го порядка с любым числом искомых функций.

Решение $(x(t),\ y(t))$ системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = f_x(x,\ y,\ t), \quad \frac{dy}{dt} = f_y(x,\ y,\ t) \tag{9}$$

(см. (2)) при начальных условиях $x|_{t=t_0} = x_0$, $y|_{t=t_0} = y_0$ зависит от x_0, y_0 как от параметров. Продифференцировав оба уравнения (9) по параметру x_0, получим

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}\right)^{\cdot} = \frac{\partial f_x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial f_x}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_0}, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial x_0}\right)^{\cdot} = \frac{\partial f_y}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_0} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_0}.$$

Аналогично находим, что производные $\partial x/\partial y_0$, $\partial y/\partial y_0$ удовлетворяют в точности той же системе уравнений. Поэтому в силу формулы (8)

$$\frac{D(x,\ y)}{D(x_0,\ y_0)} \doteq \begin{vmatrix} \partial x/\partial x_0 & \partial x/\partial y_0 \\ \partial y/\partial x_0 & \partial y/\partial y_0 \end{vmatrix} = C\exp\int_{t_0}^{t}\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right)d\tau = C\exp\int_{t_0}^{t}\operatorname{div} f\,d\tau.$$

*) В § 6 будем говорить о явлении перехлеста, при котором поле $\boldsymbol{v}$ становится в эйлеровых координатах неоднозначным, а якобиан $\frac{Dr}{Dr_0}$ меняет знак.

Так как левая часть при $t=t_0$ равна 1, то $C=1$, и мы приходим к формуле (6).

Вернемся к трехмерным движениям. Если скорость $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0,\ t)$ среды была задана в лагранжевых координатах, то

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\int_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}_0,\ \tau)\,d\tau. \tag{10}$$

Будем писать $x_1,\ x_2,\ x_3$ вместо $x,\ y,\ z$ и $v_1,\ v_2,\ v_3$ вместо $v_x,\ v_y,\ v_z$. Тогда из (10) получаем

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_{j0}}=\frac{\partial x_{i0}}{\partial x_{j0}}+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial v_i}{\partial x_{j0}}\,d\tau=\delta_{ij}+\int_{t_0}^{t}\frac{\partial v_i}{\partial x_{j0}}\,d\tau,$$

где смысл символа δ_{ij} объяснен в § I.6. Отсюда

$$\frac{D\boldsymbol{r}}{D\boldsymbol{r}_0}=\begin{vmatrix}1+\int\partial v_1/\partial x_{10}\,d\tau & \int\partial v_2/\partial x_{10}\,d\tau & \int\partial v_3/\partial x_{10}\,d\tau\\ \int\partial v_1/\partial x_{20}\,d\tau & 1+\int\partial v_2/\partial x_{20}\,d\tau & \int\partial v_3/\partial x_{20}\,d\tau\\ \int\partial v_1/\partial x_{30}\,d\tau & \int\partial v_2/\partial x_{30}\,d\tau & 1+\int\partial v_3/\partial x_{30}\,d\tau\end{vmatrix}$$

(все интегралы берутся от t_0 до t).

Важный частный случай образует случай *малых деформаций*, когда частицы движутся по закону

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}_0+\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r}_0,\ t), \tag{11}$$

где $\boldsymbol{\psi}$ мало́. Тогда элементы якобиана имеют вид $\delta_{ij}+\dfrac{\partial\psi_i}{\partial x_{j0}}$. Выписывая значение определителя через его элементы и раскрывая все скобки, получаем (проверьте!), что с точностью до членов второго порядка малости

$$\frac{D\boldsymbol{r}}{D\boldsymbol{r}_0}=1+\frac{\partial\psi_1}{\partial x_{10}}+\frac{\partial\psi_2}{\partial x_{20}}+\frac{\partial\psi_3}{\partial x_{30}}=1+\operatorname{div}_0\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{r}_0,\ t), \tag{12}$$

где div_0 означает, что дивергенция берется по переменным Лагранжа. Если представить

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x_{j0}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x_{j0}}-\frac{\partial\psi_j}{\partial x_{i0}}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi_i}{\partial x_{j0}}+\frac{\partial\psi_j}{\partial x_{i0}}\right)\text{*)}, \tag{13}$$

---

*) Говоря на тензорном языке, мы представляем тензор с компонентами $\partial\psi_i/\partial x_{j0}$ в виде суммы антисимметрического и симметрического слагаемых. Эти слагаемые определяются исходным тензором однозначно. Отметим еще, что сумма $\partial\psi_1/\partial x_{10}+\partial\psi_2/\partial x_{20}+\partial\psi_3/\partial x_{30}$, называемая следом тензора $\partial\psi_i/\partial x_{j0}$, как видно из формулы (12), равна главной части коэффициента приращения объема. Для общего тензора с компонентами a_{ij} следом называется сумма $\sum_i a_{ii}$; нетрудно проверить, что она инвариантна относительно поворота осей координат.

то можно проверить (ЭПМ, § XI.5), что первое слагаемое в правой части определяет вращение элемента среды вокруг некоторой оси, тогда как второе слагаемое определяет равномерное растяжение (или сжатие) этого элемента по трем взаимно перпендикулярным направлениям, со своим коэффициентом растяжения по каждому из этих направлений.

Покажем, как найти эти направления. Из равенства (11) получается соотношение, связывающее малые приращения координат до и после деформации

$$dx_i = dx_{i0} + \sum_j \frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j0}} dx_{j0} \qquad \left(\sum_j = \sum_{j=1}^{3};\ i = 1,\ 2,\ 3\right);$$

если же вместо $d\psi_i/dx_{j0}$ взять второе слагаемое в правой части (13), то получим соотношение

$$dx_i = dx_{i0} + \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j0}} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_{i0}}\right) dx_{j0}. \tag{14}$$

Искомые направления после деформации не изменяются, т. е. для них $dx_1 : dx_2 : dx_3 = dx_{10} : dx_{20} : dx_{30}$. Обозначив $\frac{dx_i}{dx_{i0}} = 1 + \lambda$, где λ пока неизвестно ($1+\lambda$ и есть коэффициент растяжения, отвечающий выбранному направлению), получаем в силу (14)

$$\lambda\, dx_{i0} + \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j0}} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_{i0}}\right) dx_{j0} = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{15}$$

Таким образом, для отыскания возможных значений dx_{10}, dx_{20}, dx_{30} получилась система из трех линейных однородных уравнений с тремя неизвестными. Как известно (см., например, ЭПМ, § VIII.3), для существования ненулевого решения у такой системы ее определитель должен равняться нулю:

$$\det\left(\lambda \delta_{ij} + \frac{1}{2} \sum_j \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x_{j0}} + \frac{\partial \psi_j}{\partial x_{i0}}\right)\right) = 0. \tag{16}$$

Это уравнение третьей степени относительно λ, из которого и можно найти коэффициенты растяжения в рассматриваемой точке. Найдя λ из уравнения (16), можно найти соответствующие значения $dx_1 : dx_2 : dx_3$, определяющие искомое направление, из системы (15).

Интересно отметить (этот факт мы приводим здесь без доказательства), что л ю б о е линейное отображение

$$dx_i = \sum_j \alpha_{ij} dx_j \qquad (i = 1,\ 2,\ 3), \tag{17}$$

относительно коэффициентов которого никакой малости не предполагается, сводится к комбинации растяжений по трем взаимно перпендикулярным направлениям и поворота. (При этом если коэффициент растяжения k по абсолютной величине меньше единицы, то «растяжение» на самом деле означает сжатие, а если $k<0$, то к растяжению добавляется зеркальное отражение.) Произведение коэффициентов растяжения равно коэффициенту увеличения объема при отображении, т. е., в силу § 1.4 (см. упражнение I.4.8), определителю $\det \alpha_{ij}$.

При отображении (17) малый шар переходит, вообще говоря, в трехосный эллипсоид; если два из коэффициентов растяжения совпадают,— то в эллипсоид вращения, а если все три совпадают,— то в шар. Если $\det \alpha_{ij}=0$, то один (или два, или даже все три) из коэффициентов растяжения обращаются в нуль, т. е. вся прямая по соответствующему направлению преобразуется в точку, а малый шар переходит в эллипс — «лепешку» (соответственно в отрезок, в точку). В этом случае отображение (17) — вырожденное, а если оно получилось в результате линеаризации некоторого нелинейного отображения, то, чтобы выяснить характер этого последнего в рассматриваемой точке, надо привлечь члены высшего порядка малости.

Описанный анализ произвольного линейного отображения оказывается существенным в гидродинамике, теории упругости, а также в астрофизике.

Эволюция Вселенной, описанная в § II.16,— «хэббловское расширение» — представляет собой частный случай деформации, при котором шар остается шаром с радиусом, меняющимся с течением времени; поворотов (вращения) здесь не происходит. При этом плотность является функцией времени, но не зависит от координат. Однако при учете возмущений плотности на общее расширение накладываются местные более или менее беспорядочные движения. Можно предполагать, что первоначально вещество было распределено почти равномерно, т. е. $\rho-\bar{\rho}\ll\bar{\rho}$, но затем беспорядочные движения (усиленные вследствие тяготения) привели к тому, что из общей массы газа выделились отдельные огромные облака более плотного газа — протоскопления, в переводе на русский язык — предтечи, предки скоплений галактик и звезд. Их размер достигал миллиона парсек$=3\cdot 10^{24}$ *см*, масса до $10^{14}M_{\odot}$, где $M_{\odot}=2\cdot 10^{33}$ *г* есть масса Солнца. Современная теория образования галактик будет подробно изложена, причем с применением математических фактов, приведенных в этом параграфе, в книге Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова «Космология», упомянутой в § II.16.

Упражнения

1. Напишите закон эволюции плотностей для однородного поля скоростей $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$ и общего начального условия (3).

2. Пусть $\rho_0(\boldsymbol{r}_0)=\dfrac{1}{1+|\boldsymbol{r}_0|^6}$, $\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{r}$. Найдите $\rho(\boldsymbol{r}, t)$ и $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(\boldsymbol{r}, t)$.