

§ 4. Стационарное поле скоростей

Пусть задано стационарное поле скоростей $\mathbf{v}=\mathbf{v}(r)$. Тогда каждая характеристика допускает произвольный сдвиг во времени, т. е. если $\mathbf{r}=\varphi(t)$ — характеристика, то и $\mathbf{r}=\varphi(t - \text{const})$ тоже. Поэтому решение (2.5) уравнения характеристик зависит не от t и t_1 порознь, как в общем случае, а от промежутка времени между t_1 и t , т. е. можно написать это решение в виде

$$\mathbf{r}=\varphi(t-t_1; \mathbf{r}_1).$$

Соответственно решения (3.5) и (3.4) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{r}, t) &= \rho_0(\varphi(t_0-t; \mathbf{r})) \frac{D(\varphi(t_0-t, \mathbf{r}))}{D\mathbf{r}} = \\ &= \rho_0(\varphi(t_0-t; \mathbf{r})) \exp \left[- \int_{t_0}^t (\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{s}))_{\mathbf{s}=\varphi(\tau-t; \mathbf{r})} d\tau \right]. \end{aligned}$$

Характерной чертой стационарного поля скоростей является то, что через каждую точку 3-мерного пространства x, y, z проходит ровно одна траектория частицы. В нестационарном случае характеристики в 4-мерном пространстве не пересекались, но их проекции в 3-мерное пространство x, y, z могли пересекаться, так как из одного и того же положения могли исходить различные траектории, начинающиеся там в разные моменты времени (см. рис. 58, где для наглядности изображены плоские движения). В стационарном же

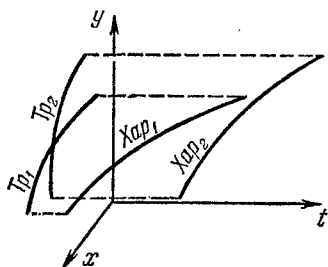


Рис. 58.

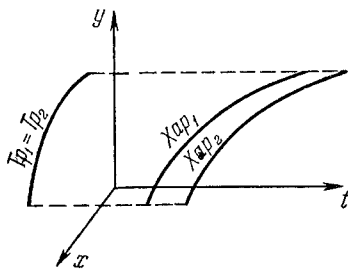


Рис. 59.

случае, если проекции двух характеристик в пространство x, y, z имеют хотя бы одну общую точку, то эти характеристики получаются друг из друга сдвигом во времени (почему?), а значит, их проекции полностью совпадают (рис. 59).

Траектории частиц для стационарного поля скоростей можно строить непосредственно в 3-мерном пространстве x, y, z , без привлечения времени t . Для этого надо все уравнения (1.3) разрешить

относительно dt и приравнять результаты, что даст

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z)} (= dt). \quad (1)$$

Интегральными кривыми этой системы дифференциальных уравнений и служат траектории частиц. (Существенно проще такое построение для случая плоских движений: тогда взамен системы (1) получается одно уравнение

$$\frac{dx}{v_x(x, y)} = \frac{dy}{v_y(x, y)}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v_y(x, y)}{v_x(x, y)}. \quad (2)$$

Изобразив соответствующее поле направлений в плоскости x, y , можно приближенно построить траектории, как в ЭПМ, § VII.1, а в ряде важных случаев уравнение (2) можно проинтегрировать точно.)

Рассмотрим теперь вопрос о построении произвольного локального параметра ϑ среды (§ 2) для случая, когда не только поле скоростей $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, но и поле этого параметра стационарны, т. е. $\vartheta = \vartheta(\mathbf{r})$.

Здесь заданное дифференциальное уравнение (2.8) для параметра приобретает вид

$$(\mathbf{v}(\mathbf{r}) \cdot \nabla) \vartheta = g(\mathbf{r}, \vartheta)$$

или, подробнее,

$$v_x(x, y, z) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y(x, y, z) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v_z(x, y, z) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = g(x, y, z, \vartheta). \quad (3)$$

В этом уравнении времени совсем не осталось, и потому его *характеристиками* принято называть интегральные кривые системы уравнений (1), т. е. траектории частиц в 3-мерном пространстве x, y, z .

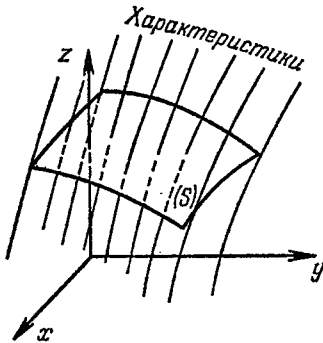


Рис. 60.

Уравнение (3) в переменных Лагранжа имеет вид

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g(\varphi(t-t_0; \mathbf{r}_0), \vartheta), \quad (4)$$

и потому знание значения ϑ в какой-либо одной точке характеристики (траектории) определяет значения ϑ во всех точках этой характеристики. Таким образом, чтобы функция $\vartheta(\mathbf{r})$ оказалась однозначно определенной в некоторой области пространства x, y, z , эта функция должна быть задана на некоторой поверхности (S) (рис. 60): если провести через все точки (S) характеристики, то они заполняют область определенности (она же область влияния, см. § II.6), т. е. область, в которой решение задачи будет однозначно определенным. При этом, подобно § II.6, поверхность (S) должна быть такой, чтобы

ни одна характеристика не только не лежала на ней, но даже не пересекала ее более одного раза.

Опишем, как построить решение аналитически. Для этого допустим, что поверхность (S) задана в параметрической форме

$$x = \chi_1(p, q), \quad y = \chi_2(p, q), \quad z = \chi_3(p, q) \quad (5)$$

(в частности, если уравнение поверхности имеет вид $z = \chi(x, y)$, то можно положить $x = p, y = q, z = \chi(p, q)$). Тогда и значения ϑ , заданные на (S) , будут функцией параметров p и q :

$$\vartheta|_{(S)} = \vartheta_0(p, q).$$

Обозначим через $\psi(t; r_0, \vartheta_0)$ решение уравнения (4) при $t_0 = 0$ и начальном условии $\vartheta|_{t=0} = \vartheta_0$. Тогда значение ϑ вдоль характеристики

$$x = \varphi_x(t; \chi_1(p, q), \chi_2(p, q), \chi_3(p, q)), \quad y = \varphi_y(\dots), \quad z = \varphi_z(\dots), \quad (6)$$

проходящей при $t=0$ через точку (5), меняется по закону

$$\vartheta = \psi(t; \chi_1(p, q), \chi_2(p, q), \chi_3(p, q), \vartheta_0(p, q)). \quad (7)$$

Теперь достаточно из четырех уравнений (6) и (7) исключить три переменные p, q, t , чтобы получить искомую зависимость $\vartheta(x, y, z)$. Если такое исключение не удастся, то равенства (6) и (7) совместно можно рассматривать как параметрическую форму этого решения (параметрическое задание 3-мерного графика этого решения в 4-мерном пространстве x, y, z, ϑ).

Более прост случай $g \equiv 0$, когда уравнение (3) имеет вид

$$v_x(x, y, z) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + v_y(x, y, z) \frac{\partial \vartheta}{\partial y} + v_z(x, y, z) \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0.$$

В этом случае выражение (7) приобретает вид $\vartheta = \vartheta_0(p, q)$, т. е. решение постоянно вдоль каждой характеристики. Однако и здесь проинтегрировать дифференциальные уравнения характеристик (1), как правило, в явном виде непросто, и приходится прибегать к численному интегрированию.

Нет смысла подробно останавливаться на математическом обобщении рассмотренной задачи, так как (3) — это общий вид почти линейного уравнения (этот термин был уже применен в § II.5) с тремя независимыми переменными. Отметим только, что тот же метод решения можно применить для *почти линейного* уравнения

$$a_1(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_n} = g(x_1, \dots, x_n, \vartheta) \quad (8)$$

с любым числом независимых переменных, какой бы смысл они ни имели. Коэффициенты a_i можно истолковать как координатные проекции поля скоростей некоторой абстрактной среды в n -мерном пространстве x_1, \dots, x_n ; при этом система дифференциальных

уравнений *характеристик*, т. е. траекторий малых порций среды будет иметь вид

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n)} = dt.$$

Вдоль каждой характеристики $x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t)$ уравнение (8) превращается в обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \vartheta),$$

так что, если известно значение ϑ в какой-либо одной точке характеристики, это значение однозначно определяется во всех точках этой характеристики. Поэтому, чтобы получить решение $\vartheta(x_1, \dots, x_n)$ в некоторой n -мерной области, оно должно быть задано на некотором $(n-1)$ -мерном многообразии; тогда фактическое построение решения будет совершенно аналогичным тому, как это описано выше при $n=3$.

Для общего квазилинейного уравнения

$$a_1(x_1, \dots, x_n, \vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_1} + \dots + a_n(x_1, \dots, x_n, \vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial x_n} = g(x_1, \dots, x_n, \vartheta)$$

характеристики определяются как линии в $(n+1)$ -мерном пространстве $x_1, \dots, x_n, \vartheta$, удовлетворяющие системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \dots, x_n, \vartheta)} = \dots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \dots, x_n, \vartheta)} = \frac{d\vartheta}{g(x_1, \dots, x_n, \vartheta)} = dt.$$

Подобно § II.17, каждая интегральная поверхность $\vartheta = \vartheta(x_1, \dots, x_n)$ целиком составлена из характеристик, так что, если в качестве начального условия задана $(n-1)$ -мерная поверхность (S) , через которую должна пройти интегральная поверхность, то для построения последней достаточно провести через каждую точку (S) характеристику.

Вернемся к задаче о построении поля плотностей при заданном поле скоростей в 3-мерном пространстве, причем предположим, что оба поля стационарны. Тогда уравнение неразрывности (3.1) примет вид

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (9)$$

т. е. поток массы не имеет источников векторных линий, что естественно, если масса каждой порции среды остается неизменной. Уравнение (9) можно, как и в § 3, переписать в виде (3.2), откуда получаем, что знание плотности среды в какой-либо одной точке однозначно определяет эту плотность во всех точках траектории частиц, проходящих через эту точку.

Исследование асимптотического при $t \rightarrow \infty$ поведения нестационарной плотности значительно сложнее, чем в одномерном слу-

чае (ср. § II.8), как из-за значительно большего разнообразия типов стационарного распределения плотности, так и из-за того, что нестационарная плотность среды в пространстве при $t \rightarrow \infty$ далеко не всегда имеет тенденцию к установлению. Например, если среда с несимметричной плотностью вращается как абсолютно твердое тело,

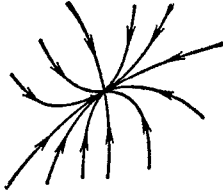


Рис. 61.

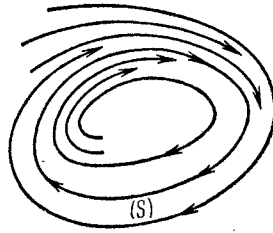


Рис. 62.

то, конечно, никакого установления не будет. Возможны и более сложные типы движений без установления, о которых мы здесь не будем говорить.

Важную роль при исследовании асимптотического поведения плотности среды играют асимптотически устойчивые (притягивающие) точки покоя и притягивающие многообразия; для плоских движений наиболее распространенные виды таких точек и многообразий (*устойчивый предельный цикл (S)*) показаны соответственно на рис. 61 и 62. Вблизи таких точек и многообразий при $t \rightarrow \infty$ масса концентрируется все плотнее и плотнее, так что в пределе получается дельтаобразное распределение массы (в точке или на многообразии), тогда как вся масса в «зоне притяжения» вне указанных точки или многообразия в пределе «высасывается» до нуля. (Подчеркнем, что на рис. 61 траектории достигают точки покоя только в пределе, при $t = \infty$, так что, строго говоря, точка покоя не принадлежит этим траекториям, она как бы составляет самостоятельную траекторию. В противном случае две различные траектории имели бы общую точку, чего, как мы говорили, не должно быть.) Аналогичным образом «выталкивается» в пределе до нуля вся масса из окрестности отталкивающих точек покоя и многообразий.

Упражнения

1. Найдите решение уравнения $x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} + z \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0$ в полупространстве $z > 0$, удовлетворяющее условию $\Phi|_{z=x^2+y^2} = x-y$.

2. Укажите какое-либо стационарное распределение плотностей плоского потока для поля скоростей $\mathbf{v} = x^3 \mathbf{i} - y \mathbf{j}$; изобразите соответствующее семейство траекторий.