§ 5. Дивергентная форма уравнений

Рассмотрение дивергентной формы уравнения эволюции локального параметра ϑ

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)\vartheta)+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\equiv\frac{\partial}{\partial x}(v_x(x,y,z,t)\vartheta)+\frac{\partial}{\partial y}(v_y\vartheta)+$$
$$+\frac{\partial}{\partial z}(v_z\vartheta)+\frac{\partial\vartheta}{\partial t}=0 \qquad (1)$$

проводится совершенно аналогично тому, как в одномерном случае (§ II.9). Во-первых, нетрудно проверить, что интеграл

$$\Theta=\int\vartheta(\boldsymbol{r},t)\,|d\boldsymbol{r}| \qquad (|d\boldsymbol{r}|=dx\,dy\,dz),$$

распространенный по всему пространству, инвариантен, т. е. не зависит от t. В самом деле, в силу уравнения (1),

$$\frac{d\Theta}{dt}=\int\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\,|d\boldsymbol{r}|=-\int\operatorname{div}(\boldsymbol{v}\vartheta)\,|d\boldsymbol{r}|=0.$$

(При этом для осуществления последнего перехода надо применить формулу Остроградского к сфере весьма большого радиуса; равенство интеграла по поверхности нулю, вытекающее из достаточно быстрого обращения ϑ в нуль при $|\boldsymbol{r}|\to\infty$, означает отсутствие источника величины Θ на бесконечности.)

Более общее утверждение состоит в независимости от t интеграла

$$\Theta_{(\Omega)}=\int\limits_{(\Omega_t)}\vartheta(\boldsymbol{r},t)\,|d\boldsymbol{r}|, \qquad (2)$$

где (Ω_t) — это «жидкая» область, деформирующаяся при изменении t в соответствии с эволюцией частиц, т. е. согласно уравнению $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$. Можно представить себе, что некоторая порция жидкости зачернена и переносится потоком без диффузии, тогда (Ω_t) — это часть пространства, занятая зачерненной жидкостью в момент t.

Докажем это более общее утверждение. (Отметим, что при изменении t область интегрирования (Ω_t) меняется; поэтому при дифференцировании интеграла (2) по t нельзя ограничиться дифференцированием по t подынтегральной функции.)

Допустим, что после момента t прошло время dt; тогда к области (Ω_t) добавилась тонкая пленка, ограниченная поверхностью (Γ_t) этой области и поверхностью, проходящей «почти параллельно» (Γ_t). При этом ширина пленки равна $v_n dt$, где n — внешняя нормаль к (Γ_t) (почему?). Отсюда

$$d\Theta_{(\Omega)}=\left[\int\limits_{(\Omega_t)}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\,|d\boldsymbol{r}|+\int\limits_{(\Gamma_t)}(\vartheta\boldsymbol{v})_n\,d\Gamma\right]dt.$$

Преобразуя последний интеграл по формуле Остроградского и пользуясь уравнением (1), получаем

$$d\Theta_{(\Omega)}=\left[\int\limits_{(\Omega_t)}\frac{\partial\vartheta}{\partial t}\,|d\boldsymbol{r}|+\int\limits_{(\Omega_t)}\operatorname{div}(\vartheta\boldsymbol{v})\,|d\boldsymbol{r}|\right]dt=0,$$

т. е. $\Theta_{(\Omega)}=\mathrm{const}$, что и требовалось доказать.

Если поле скоростей $\boldsymbol{v}$ и параметр ϑ стационарны, то уравнение (1) принимает вид

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})\,\vartheta)\equiv\frac{\partial}{\partial x}(v_x(x,\ y,\ z)\,\vartheta)+\frac{\partial}{\partial y}(v_y(x,\ y,\ z)\,\vartheta)+\frac{\partial}{\partial z}(v_z(x,\ y,\ z)\,\vartheta)=0.$$

Утверждение о независимости интеграла

$$\int\limits_{(\Omega_t)}\vartheta(\boldsymbol{r})\,|d\boldsymbol{r}| \tag{3}$$

сохраняет силу.

Полученный результат очевиден физически, так как уравнение неразрывности, с которым мы здесь имеем дело, как раз и выражает закон сохранения масс. Однако приведенное формальное доказательство не только еще раз показывает, что здесь все в порядке, но и доказывает, что утверждение об инвариантности интегралов (2) или (3) остается справедливым для любого числа независимых переменных. В самом деле, это доказательство опиралось только на формулу Остроградского, которая, как нетрудно проверить, справедлива в пространстве любого числа измерений.

Упражнение

Найдите решение уравнения $\frac{\partial(x\vartheta)}{\partial x}+\frac{\partial(y\vartheta)}{\partial y}+\frac{\partial(z\vartheta)}{\partial z}=0$, равное $y+z$ для $x=1$.

Проверьте инвариантность интеграла (3) для «жидкой» области, которая при $t=0$ представляет собой куб с вершинами $(2\pm1;\ \pm1;\ 1\pm1)$ (комбинации знаков произвольные).

§ 6. Перехлесты

Как и в одномерном случае (§ 11.10), если скорости частиц задаются в лагранжевых координатах, для плоских и пространственных движений возможен «перехлест», при котором в одну и ту же точку придут частицы из различных начальных положений, так что плоскость или пространство окажутся как бы покрытыми несколькими слоями среды. Мы разберем для простоты плоские движения в случае, когда все частицы движутся по инерции, с постоянной скоростью, а о других видах движений коротко скажем позже.