

Преобразуя последний интеграл по формуле Остроградского и пользуясь уравнением (1), получаем

$$d\Theta_{(\Omega)} = \left[\int_{(\Omega_t)} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} |d\mathbf{r}| + \int_{(\Omega_t)} \operatorname{div}(\vartheta \mathbf{v}) |d\mathbf{r}| \right] dt = 0,$$

т. е. $\Theta_{(\Omega)} = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Если поле скоростей \mathbf{v} и параметр ϑ стационарны, то уравнение (1) принимает вид

$$\operatorname{div}(\mathbf{v}(\mathbf{r}) \vartheta) \equiv \frac{\partial}{\partial x}(v_x(x, y, z) \vartheta) + \frac{\partial}{\partial y}(v_y(x, y, z) \vartheta) + \frac{\partial}{\partial z}(v_z(x, y, z) \vartheta) = 0.$$

Утверждение о независимости интеграла

$$\int_{(\Omega_t)} \vartheta(\mathbf{r}) |d\mathbf{r}| \quad (3)$$

сохраняет силу.

Полученный результат очевиден физически, так как уравнение неразрывности, с которым мы здесь имеем дело, как раз и выражает закон сохранения масс. Однако приведенное формальное доказательство не только еще раз показывает, что здесь все в порядке, но и доказывает, что утверждение об инвариантности интегралов (2) или (3) остается справедливым для любого числа независимых переменных. В самом деле, это доказательство опиралось только на формулу Остроградского, которая, как нетрудно проверить, справедлива в пространстве любого числа измерений.

Упражнение

Найдите решение уравнения $\frac{\partial(x\vartheta)}{\partial x} + \frac{\partial(y\vartheta)}{\partial y} + \frac{\partial(z\vartheta)}{\partial z} = 0$, равное $y+z$ для $x=1$.

Проверьте инвариантность интеграла (3) для «жидкой» области, которая при $t=0$ представляет собой куб с вершинами $(2 \pm 1; \pm 1; 1 \pm 1)$ (комбинации знаков произвольные).

§ 6. Перехлесты

Как и в одномерном случае (§ 11.10), если скорости частиц заданы в лагранжевых координатах, для плоских и пространственных движений возможен «перехлест», при котором в одну и ту же точку придут частицы из различных начальных положений, так что плоскость или пространство окажутся как бы покрытыми несколькими слоями среды. Мы разберем для простоты плоские движения в случае, когда все частицы движутся по инерции, с постоянной скоростью, а о других видах движений коротко скажем позже.

Обозначим лагранжевы координаты частицы через ξ , η :

$$x|_{t=t_0} = \xi, \quad y|_{t=t_0} = \eta,$$

а ее (постоянную) скорость через

$$\mathbf{v}(\xi, \eta) = v_x(\xi, \eta) \mathbf{i} + v_y(\xi, \eta) \mathbf{j}.$$

Тогда уравнения движения частицы примут вид

$$x = \xi + v_x(\xi, \eta) (t - t_0), \quad y = \eta + v_y(\xi, \eta) (t - t_0). \quad (1)$$

В любой фиксированный момент времени $t > t_0$ малая окрестность точки $(\xi; \eta)$ преобразуется по формулам

$$\left. \begin{aligned} \Delta x &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} \Delta \eta = \left[1 + \frac{\partial v_x}{\partial \xi} (t - t_0) \right] \Delta \xi + \frac{\partial v_x}{\partial \eta} (t - t_0) \Delta \eta, \\ \Delta y &= \frac{\partial y}{\partial \xi} \Delta \xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} \Delta \eta = \frac{\partial v_y}{\partial \xi} (t - t_0) \Delta \xi + \left[1 + \frac{\partial v_y}{\partial \eta} (t - t_0) \right] \Delta \eta, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

где буквой Δ обозначены приращения координат и отброшены члены высшего порядка малости. Мы уже говорили в § 1.4, что определитель из получающихся коэффициентов

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + (t - t_0) \frac{\partial v_x}{\partial \xi} & (t - t_0) \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \\ (t - t_0) \frac{\partial v_y}{\partial \xi} & 1 + (t - t_0) \frac{\partial v_y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (3)$$

называется якобианом рассматриваемого отображения. Если он отличен от нуля, то отображение (2) является невырожденным, т. е. обратимым: задаваясь значениями Δx , Δy , мы получаем вполне определенные значения $\Delta \xi$, $\Delta \eta$; в этом случае линейное отображение (2) называется *аффинным* (ср. ЭПМ, § IX.5).

В соответствии с § 3, если якобиан в некоторой точке обращается в нуль, то отображение (2) — вырожденное, а чтобы выяснить характер отображения (1), надо привлечь члены высшего порядка малости. Отметим, что приравнивание нулю якобиана можно рассматривать как уравнение, связывающее переменные ξ и η ; поэтому, если якобиан равен нулю в некоторой точке плоскости ξ , η , то он обычно обращается в нуль вдоль целой линии, проходящей через эту точку.

Впрочем, якобиан J может равняться нулю и в изолированной точке. Так обычно бывает в момент начала перехлеста в точке зарождения складки; после этого момента в плоскости ξ , η начинает развиваться область, внутри которой $J < 0$, а на границе $J = 0$.

Рассмотрим в качестве примера поле скоростей

$$\mathbf{v} = \frac{1}{1 + \xi^2 + \eta^2} \mathbf{i},$$

показанное на рис. 63. Отсюда, приняв $t_0 = 0$, получим уравнения

движения частиц

$$x = \xi + \frac{1}{1 + \xi^2 + \eta^2} t, \quad y = \eta, \quad (4)$$

и потому якобиан отображения $(\xi; \eta) \rightarrow (x; y)$ равен

$$J = \begin{vmatrix} 1 - 2\xi t (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-2} & -2\eta t (1 + \xi^2 + \eta^2)^{-2} \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{2\xi t}{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2}.$$

Приравнивание якобиана нулю приводит к уравнению

$$(1 + \xi^2 + \eta^2)^2 - 2\xi t = 0, \quad (5)$$

определяющему при заданном t область перехлеста в плоскости ξ, η . Таким образом, в данном примере каждая частица, для которой $\xi \neq 0$, попадает на границу складки в момент

$$t = \frac{(1 + \xi^2 + \eta^2)^2}{2\xi}. \quad (6)$$

Легко проверить (это мы предоставляем читателю), что при $\xi > 0$, т. е. $t > 0$, функция (6) принимает минимальное значение $t_{кр} = \frac{8}{3\sqrt{3}}$ при $\xi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\eta = 0$; это и есть момент начала перехлеста и начальные координаты частицы, в которой начинается складка. Развитие границы складки в плоскости ξ, η показано на рис. 64: при каждом $t > t_{кр}$ получается замкнутая линия, ограничивающая область, в которой

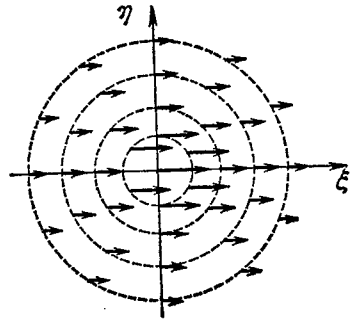


Рис. 63.

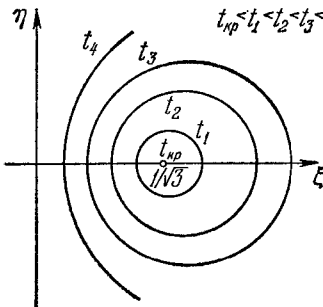


Рис. 64.

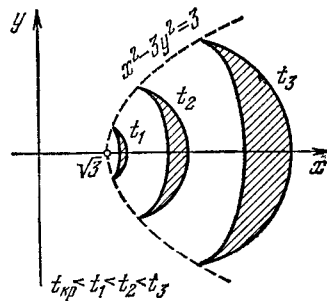


Рис. 65.

$J < 0$, тогда как на самой этой линии $J = 0$. Развитие области складки на основной плоскости x, y показано на рис. 65; уравнение границы этой области получается, если из уравнений (4) и (5) исключить ξ, η , оставив t в качестве параметра.

Разобранный пример не вполне типичен в том отношении, что, как получилось, каждая частица попадает на край складки один раз (в момент (6)). В общем случае, если приравнять определитель (3) нулю, то получится к в а д р а т н о е уравнение относительно t . Это означает, что если t пробегает все значения от $-\infty$ до ∞ , то, за исключением особых случаев, малая окрестность любой частицы либо дважды «выворачивается наизнанку» (см. § 1.4), если корни указанного квадратного уравнения вещественны и различны, либо вообще ни разу не попадает на складку, если эти корни мнимые. Здесь проявляется существенное различие между одномерными и двумерными движениями: если для одномерных движений с нетривиальным полем скоростей, постоянных для каждой частицы, перехлест обязательно имел место при $t > t_0$, либо при $t < t_0$, то для двумерных движений это не обязательно.

Простейшим примером поля скоростей, для которого перехлест не наступает, является поле скоростей вращающейся плоскости. Можно себе представить, что плоскость вращалась вокруг начала координат с угловой скоростью ω как абсолютно твердое тело, но в некоторый момент t_0 силы сцепления между частицами плоскости исчезли и эти частицы продолжают двигаться по инерции. Тогда уравнения движения частиц имеют вид

$$x = \xi - \omega \eta (t - t_0), \quad y = \eta + \omega \xi (t - t_0),$$

откуда якобиан

$$J = 1 + \omega^2 (t - t_0)^2 \geq 1,$$

т. е. перехлеста не наступает ни при $t > t_0$, ни (если обратить процесс во времени) при $t < t_0$.

Любопытно, что указанное различие между одномерными и двумерными движениями связано с четностью или нечетностью размерности пространства, в котором происходит движение. Нетрудно проверить (это мы предоставляем читателю), что при рассмотрении трехмерных движений уравнение $J = 0$ имеет, вообще говоря, третью степень относительно t , и потому обязательно обладает по крайней мере одним вещественным корнем. Таким образом, для трехмерных движений, за исключением некоторых вырожденных случаев, перехлест обязательно имеет место.

Вернемся к общим уравнениям (1) движения частиц на плоскости. Как ясно из предыдущего, при возникновении перехлеста появляется и линия заворота среды, ограничивающая область перехлеста. На этой линии якобиан J равен нулю, т. е. в силу (3) эта линия в плоскости ξ, η определяется уравнением

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \equiv 1 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial \xi} + \frac{\partial v_y}{\partial \eta} \right) (t - t_0) + \left(\frac{\partial v_x}{\partial \xi} \frac{\partial v_y}{\partial \eta} - \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \frac{\partial v_y}{\partial \xi} \right) (t - t_0)^2 = 0. \quad (7)$$

Чтобы получить соответствующую линию в плоскости x, y , надо это уравнение рассмотреть совместно с уравнениями (1). Если из полученных трех уравнений удастся исключить две переменных ξ, η , мы получим уравнение границы области перехлеста, в которое t войдет в качестве параметра.

Из уравнения (7) видно, что если производные 1-го порядка от скорости $\mathbf{v}(\xi, \eta)$ ограничены на всей плоскости, то для t , достаточно близкого к t_0 , перехлеста не будет, т. е. если он и произойдет, то не сразу. На рис. 66 показана типичная картина развития перехлеста, возникшего в момент $t_{кр}$; при этом в момент $t_{кр}^{(2)}$ начинается повторный перехлест, так что при $t = t_3$ густо заштрихованную область покрывает пять слоев среды.

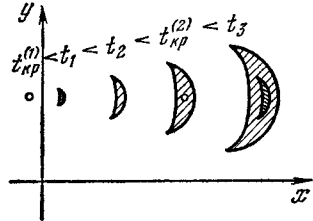


Рис. 66.

Как определить момент начала перехлеста? В этой критической ситуации функция $t(\xi, \eta)$, определенная из (7), должна иметь мини-

мальное значение, т. е. частные производные $\frac{\partial t}{\partial \xi}$ и $\frac{\partial t}{\partial \eta}$ должны равняться нулю. Поэтому с помощью дифференцирования равенства (7) и последующего сокращения на $t - t_0$ мы получаем, что в критической ситуации имеют место соотношения

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial \xi \partial \eta} + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial \xi^2} \frac{\partial v_y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial v_x}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial v_y}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial \xi^2} \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right) (t - t_0) = 0,$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial \eta^2} + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial v_y}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial \eta^2} \frac{\partial v_x}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial \eta^2} \frac{\partial v_y}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial v_x}{\partial \eta} \right) (t - t_0) = 0.$$

Эти два уравнения вместе с (7) образуют три уравнения с тремя неизвестными ξ, η, t , определяющими лагранжевы координаты и момент начала перехлеста; соответствующие эйлеровы координаты получаются из равенств (1).

В силу геометрического смысла якобиана, как коэффициента искажения площадей, обращение его в нуль на линии (Γ) заворота среды влечет за собой обращение плотности среды в этих точках в бесконечность. При переходе через (Γ) (точнее, через прообраз (Γ) в плоскости ξ, η в выбранный момент времени $t > t_{кр}$) этот якобиан становится отрицательным, т. е. участок среды «выворачивается наизнанку». Как и в § II.10, при формальных вычислениях можно считать плотность такого «вывернутого» участка отрицательной и пользоваться тогда формулой

$$\rho_0 = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \rho,$$

связывающей исходную плотность с текущей, а также уравнением неразрывности (I.8.7) без простановки знака абсолютной величины у якобиана.

Если частицы движутся с переменной скоростью, то взамен (1) надо пользоваться уравнениями

$$x = \xi + \int_{t_0}^t v_x(\tau; \xi, \eta) d\tau, \quad y = \eta + \int_{t_0}^t v_y(\tau; \xi, \eta) d\tau,$$

и все выкладки соответственно усложняются, хотя их схема и качественная картина образования перекреста остаются прежними. При рассмотрении пространственных движений выкладки изменяются очевидным образом. Продумайте как следует соответствующую качественную картину! Представляя себе перекрест на прямой, мы привлекаем добавочную геометрическую размерность, в которой «отсчитываются» слои среды; на плоскости же и в пространстве надо представлять себе, что слои проникают один в другой, — подробнее, частицы одного слоя проникают в промежутки между частицами другого.

§ 7. Движение с источником массы

Рассмотрим простейший источник массы — точечный. Допустим, что в начале координат $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ расположен такой источник мощности (обильности) Q единиц массы в единицу времени, причем, кроме этого источника, в конечной части пространства нет ни источников, ни стоков массы. Тогда возникающая масса должна уходить на бесконечность, т. е. на бесконечности $|\mathbf{r}| = \infty$ имеется сток той же обильности Q или, что то же, источник обильности $-Q$.

Конкретный вид поля скоростей для точечного источника может быть различным в зависимости от дополнительных предположений. Рассмотрим простейший вариант, когда среда предполагается имеющей постоянную плотность $\rho_0 = \text{const}$, а течение стационарным и центрально-симметричным. Тогда поле скоростей должно иметь вид

$$\mathbf{v} = f(|\mathbf{r}|) \mathbf{r}^0 \quad \left(\mathbf{r}^0 = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right),$$

а из баланса масс внутри сферы $|\mathbf{r}| = \text{const}$ получаем

$$4\pi |\mathbf{r}|^2 f(|\mathbf{r}|) \rho_0 = Q, \quad \text{т. е. } f(|\mathbf{r}|) = \frac{Q}{4\pi \rho_0 |\mathbf{r}|^2}$$

$$\text{и } \mathbf{v} = \frac{Q \mathbf{r}^0}{4\pi \rho_0 |\mathbf{r}|^2} = \frac{Q \mathbf{r}}{4\pi \rho_0 |\mathbf{r}|^3}. \quad (1)$$

Это поле — безвихревое, $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{0}$, и потому потенциальное (см., например, ЭПМ, § XI.9), с потенциалом, равным

$$\frac{Q}{4\pi \rho_0 |\mathbf{r}|}$$