связывающей исходную плотность с текущей, а также уравнением неразрывности (I.8.7) без простановки знака абсолютной величины у якобиана.

Если частицы движутся с переменной скоростью, то взамен (1) надо пользоваться уравнениями

$$x=\xi+\int_{t_0}^{t} v_x(\tau;\ \xi,\ \eta)\,d\tau,\qquad y=\eta+\int_{t_0}^{t} v_y(\tau;\ \xi,\ \eta)\,d\tau,$$

и все выкладки соответственно усложняются, хотя их схема и качественная картина образования перехлеста остаются прежними. При рассмотрении пространственных движений выкладки изменяются очевидным образом. Продумайте как следует соответствующую качественную картину! Представляя себе перехлест на прямой, мы привлекаем добавочную геометрическую размерность, в которой «отсчитываются» слои среды; на плоскости же и в пространстве надо представлять себе, что слои проникают один в другой,— подробнее, частицы одного слоя проникают в промежутки между частицами другого.

§ 7. Движение с источником массы

Рассмотрим простейший источник массы — точечный. Допустим, что в начале координат $\boldsymbol{r}=0$ расположен такой источник мощности (обильности) Q единиц массы в единицу времени, причем, кроме этого источника, в конечной части пространства нет ни источников, ни стоков массы. Тогда возникшая масса должна уходить на бесконечность, т. е. на бесконечности $|\boldsymbol{r}|=\infty$ имеется сток той же обильности Q или, что то же, источник обильности $-Q$.

Конкретный вид поля скоростей для точечного источника может быть различным в зависимости от дополнительных предположений. Рассмотрим простейший вариант, когда среда предполагается имеющей постоянную плотность $\rho_0=\text{const}$, а течение стационарным и центрально-симметричным. Тогда поле скоростей должно иметь вид

$$\boldsymbol{v}=f(|\boldsymbol{r}|)\,\boldsymbol{r}^0\qquad\left(\boldsymbol{r}^0=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}\right),$$

а из баланса масс внутри сферы $|\boldsymbol{r}|=\text{const}$ получаем

$$4\pi|\boldsymbol{r}|^2 f(|\boldsymbol{r}|)\,\rho_0=Q,\ \text{т. е. } f(|\boldsymbol{r}|)=\frac{Q}{4\pi\rho_0|\boldsymbol{r}|^2}$$

$$\text{и } \boldsymbol{v}=\frac{Q\boldsymbol{r}^0}{4\pi\rho_0|\boldsymbol{r}|^2}=\frac{Q\boldsymbol{r}}{4\pi\rho_0|\boldsymbol{r}|^3}. \qquad (1)$$

Это поле — безвихревое, $\operatorname{rot}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$, и потому потенциальное (см., например, ЭПМ, § XI.9), с потенциалом, равным

$$-\frac{Q}{4\pi\rho_0|\boldsymbol{r}|}$$

(проверьте!). Из определения дивергенции (§ I.8) сразу следует, что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{Q}{\rho_0} \delta(\boldsymbol{r}),$$

где $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ — пространственная дельта-функция.

Многие другие движения с источником массы получаются в результате наложения рассмотренных простейших источников, расположенных в различных точках пространства. Так, в результате равномерного распределения простейших источников вдоль прямой получается плоскопараллельное течение с источником массы, которое можно рассматривать как плоское. В результате наложения источника и стока равной и притом бесконечно большой обильности на бесконечно малом расстоянии получается *диполь* и т. д. Но мы не будем рассматривать здесь эти поля. Дело в том, что рассмотренное здесь поле (1) совпадает, с точностью до единиц измерения, с электростатическим полем в пустоте, порожденным зарядом $q = \frac{Q}{\rho_0}$, помещенным в начале координат (ЭПМ, § X.5). Поэтому и результаты наложения получаются такие же, как для электрических полей, а они были рассмотрены в ЭПМ, § X.6.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 1

1. Характеристическое уравнение имеет корни $p_1 = 3$, $p_2 = -1$; им отвечают решения $x_1 = e^{3t}$, $y_1 = -2e^{3t}$ и $x_2 = e^{-t}$, $y = 2e^{-t}$. Значит, общее решение системы имеет вид $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$, $y = -2C_1e^{3t} + 2C_2e^{-t}$. Из начальных условий получаем $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. Итак, искомое решение таково: $x = -e^{3t} + e^{-t}$, $y = 2e^{3t} + 2e^{-t}$.

2. Пусть сначала $\psi(t) \equiv 0$, тогда решение $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ линейно зависит от $\varphi(t)$. Строя по обычным правилам функцию влияния (§ II.2), получаем при $t > 0$, $\tau > 0$

$$\boldsymbol{G}_\varphi(t;\ \tau) = \begin{cases} 0 & (t < \tau), \\ \cos(t-\tau)\,\boldsymbol{i} - \sin(t-\tau)\,\boldsymbol{j} & (t > \tau). \end{cases}$$

Аналогично находим

$$\boldsymbol{G}_\psi(t;\ \tau) = \begin{cases} 0 & (t < \tau), \\ \sin(t-\tau)\,\boldsymbol{i} + \cos(t-\tau)\,\boldsymbol{j} & (t > \tau). \end{cases}$$

Так как при сложении неоднородных членов уравнения и решения складываются, то получаем искомое решение

$$x = \int_0^t [\varphi(\tau)\cos(t-\tau) + \psi(\tau)\sin(t-\tau)]\,d\tau,$$

$$y = \int_0^t [-\varphi(\tau)\sin(t-\tau) + \psi(\tau)\cos(t-\tau)]\,d\tau.$$

Те же окончательные формулы справедливы для $t < 0$.