(проверьте!). Из определения дивергенции (§ I.8) сразу следует, что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{v} = \frac{Q}{\rho_0}\,\delta(\boldsymbol{r}),$$

где $\delta(\boldsymbol{r}) = \delta(x)\delta(y)\delta(z)$ — пространственная дельта-функция.

Многие другие движения с источником массы получаются в результате наложения рассмотренных простейших источников, расположенных в различных точках пространства. Так, в результате равномерного распределения простейших источников вдоль прямой получается плоскопараллельное течение с источником массы, которое можно рассматривать как плоское. В результате наложения источника и стока равной и притом бесконечно большой обильности на бесконечно малом расстоянии получается *диполь* и т. д. Но мы не будем рассматривать здесь эти поля. Дело в том, что рассмотренное здесь поле (1) совпадает, с точностью до единиц измерения, с электростатическим полем в пустоте, порожденным зарядом $q = \frac{Q}{\rho_0}$, помещенным в начале координат (ЭПМ, § X.5). Поэтому и результаты наложения получаются такие же, как для электрических полей, а они были рассмотрены в ЭПМ, § X.6.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 1

1. Характеристическое уравнение имеет корни $p_1 = 3$, $p_2 = -1$; им отвечают решения $x_1 = e^{3t}$, $y_1 = -2e^{3t}$ и $x_2 = e^{-t}$, $y = 2e^{-t}$. Значит, общее решение системы имеет вид $x = C_1e^{3t} + C_2e^{-t}$, $y = -2C_1e^{3t} + 2C_2e^{-t}$. Из начальных условий получаем $C_1 = -1$, $C_2 = 1$. Итак, искомое решение таково: $x = -e^{3t} + e^{-t}$, $y = 2e^{3t} + 2e^{-t}$.

2. Пусть сначала $\psi(t) \equiv 0$, тогда решение $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$ линейно зависит от $\varphi(t)$. Строя по обычным правилам функцию влияния (§ II.2), получаем при $t > 0$, $\tau > 0$

$$\boldsymbol{G}_\varphi(t;\ \tau) = \begin{cases} 0 & (t < \tau), \\ \cos(t-\tau)\,\boldsymbol{i} - \sin(t-\tau)\,\boldsymbol{j} & (t > \tau). \end{cases}$$

Аналогично находим

$$\boldsymbol{G}_\psi(t;\ \tau) = \begin{cases} 0 & (t < \tau), \\ \sin(t-\tau)\,\boldsymbol{i} + \cos(t-\tau)\,\boldsymbol{j} & (t > \tau). \end{cases}$$

Так как при сложении неоднородных членов уравнения и решения складываются, то получаем искомое решение

$$x = \int_0^t [\varphi(\tau)\cos(t-\tau) + \psi(\tau)\sin(t-\tau)]\,d\tau,$$

$$y = \int_0^t [-\varphi(\tau)\sin(t-\tau) + \psi(\tau)\cos(t-\tau)]\,d\tau.$$

Те же окончательные формулы справедливы для $t < 0$.

§ 2

1. Здесь уравнение (2.7) приобретает вид

$$\frac{d\vartheta}{dt}=\beta\vartheta+\alpha t+(\gamma x_0+\delta z_0),$$

причем члены, взятые в скобки, постоянны. Интегрирование при заданном начальном условии дает результат

$$\vartheta(\boldsymbol{r}_0,\ t)=[\beta^{-1}(\alpha t_0+\alpha\beta^{-1}+\gamma x_0+\delta z_0)+a\dot{x}_0+by_0]\,e^{\beta(t-t_0)}-$$
$$-\beta^{-1}(\alpha t+\alpha\beta^{-1}+\gamma x_0+\delta z_0).$$

2. Решение уравнения характеристик имеет вид

$$x=\frac{1}{4}[(2x_0-z_0)e^{3t}+(2x_0+z_0)e^{-t}],\ y=y_0,\ z=\frac{1}{2}[(z_0-2x_0)e^{3t}+$$
$$+(z_0+2x_0)e^{-t}], \qquad (1)$$

уравнение (2.3) дает $\vartheta(\boldsymbol{r},\ t)=x_0$. Выражая из (1) x_0, получаем

$$\vartheta(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{1}{2}(e^t+e^{-3t})\,x+\frac{1}{4}(e^t-e^{-3t})\,z.$$

3. Пусть система уравнений (2.10) при начальных условиях $\boldsymbol{r}|_{t=t_1}=\boldsymbol{r}_1$, $\vartheta|_{t=t_1}=\vartheta_1$ имеет решение $\boldsymbol{r}=\varphi(t;\ t_1,\ \boldsymbol{r}_1,\ \vartheta_1)$, $\vartheta=\psi(t;\ t_1,\ \boldsymbol{r}_1,\ \vartheta_1)$. Тогда искомое решение, в неявной форме, имеет вид $\psi(t_0;\ t,\ \boldsymbol{r},\ \vartheta)=\vartheta_0(\varphi(t_0;\ t,\ \boldsymbol{r},\ \vartheta))$.

§ 3

1. $\rho(\boldsymbol{r},\ t)=\rho_0\left(\boldsymbol{r}-\int\limits_{t_0}^{t}\boldsymbol{v}(\tau)\,d\tau\right)$.

2. Уравнение характеристик $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=-\boldsymbol{r}$ имеет решение $\boldsymbol{r}=e^{t_0-t}\boldsymbol{r}_0$. Отсюда $\frac{D\boldsymbol{r}}{D\boldsymbol{r}_0}=e^{3(t_0-t)}$, $\rho(\boldsymbol{r},\ t)=[1+|\boldsymbol{r}|^6e^{6(t-t_0)}]^{-1}e^{3(t-t_0)}$, т. е. при $t\longrightarrow\infty$ вся масса концентрируется в начале координат. Но эта масса равна $\int\limits_0^\infty(4\pi\,|\boldsymbol{r}_0|^2\,d\,|\boldsymbol{r}_0|)\times(1+|\boldsymbol{r}_0|^6)^{-1}=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{2}{3}\pi^2$, поэтому $\lim\limits_{t\to\infty}\rho(\boldsymbol{r},\ t)=\frac{2}{3}\pi^2\delta(\boldsymbol{r})$.

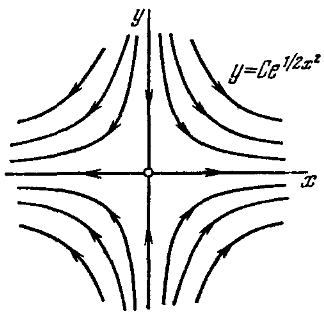

Рис. 67.

§ 4

1. Система уравнений характеристик $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}=dt$ имеет решение $x=x_0e^t$, $y=y_0e^t$, $z=z_0e^t$. Исключая из этих равенств и уравнений $z_0=x_0^2+y_0^2$, $\vartheta=x_0-y_0$ величины x_0, y_0, z_0, t, получаем $\vartheta=\frac{(x-y)\,z}{x^2+y^2}$. Решение имеет сложную особенность на оси z.

2. Семейство траекторий показано на рис. 67. Уравнение движения среды $\frac{dx}{x^3}=-\frac{dy}{y}=dt$, откуда $x=x_0\left(1-2tx_0^2\right)^{-1/2}$, $y=y_0e^{-t}$; интересно, что t ме-

няется от $-\infty$ до $\frac{1}{2x_0^2}$, т. е. частицы уходят в бесконечность за конечное время. Вычисление дает $\frac{D(x, y)}{D(x_0, y_0)}=(1-2tx_0^2)^{-3/2}e^{-t}$. Поэтому, полагая, например, $\rho|_{x_0=1}=1$, получаем $\rho(x, y)=(1-2t)^{3/2}e^t$, $x=(1-2t)^{-1/2}$, откуда $\rho=x^{-3}\exp[(1-x^{-2})/2]$. Считая зависимость $\rho(x)$ четной, получаем окончательно $\rho(x, y)=|x|^{-3}\exp[(1-x^{-2})/2]$. Отметим, что при этом $\rho|_{x=0}=$ $=\rho|_{x=\pm\infty}=0$.

§ 5

Уравнение характеристик имеет решение $x=x_0e^t$, $y=y_0e^t$, $z=z_0e^t$; из уравнения $\frac{d\vartheta}{dt}=-3\vartheta$ получаем $\vartheta=\vartheta_0e^{-3t}$. Добавляя соотношения $x_0=1$, $\vartheta_0=y_0+z_0$, получаем искомое решение $\vartheta=(y+z)x^{-4}$. Интеграл (5.3) равен $\int\limits_{e^t}^{3e^t}dx\int\limits_{-e^t}^{e^t}dy\int\limits_{0}^{2e^t}(y+z)x^{-4}dz=\frac{104}{81}$ и не зависит от t.