

ГЛАВА IV

ДВИЖЕНИЕ ПОД ДЕЙСТВИЕМ ЗАДАННЫХ ВНЕШНИХ СИЛ

§ 1. Прямолинейное движение одиночной частицы

Начнем с рассмотрения одиночной частицы массы m_0 , движущейся вдоль оси x под действием некоторой силы, направленной вдоль этой же оси. Эта сила может задаваться по-разному, вследствие чего уравнение движения частицы будет иметь ту или иную структуру. Так, сила F может быть задана как функция от положения частицы и от времени, т. е. $F = F(x, t)$; тогда на основании 2-го закона Ньютона уравнение движения частицы примет вид

$$m_0 \ddot{x} = F(x, t) \quad \left(\cdot = \frac{d}{dt} \right). \quad (1)$$

Таким образом, основное отличие от ситуации, рассмотренной в § II.1, состоит в том, что оказываются заданными не скорости, а ускорения частицы.

Силовое поле $F(x, t)$ в одномерном случае всегда имеет потенциал, т. е. функцию $U(x, t)$, для которой

$$F(x, t) \equiv - \frac{\partial U}{\partial x} :$$

достаточно просто положить при каком-либо x_0

$$U(x, t) = - \int_{x_0}^x F(s, t) ds.$$

Ясно, что потенциал определен с точностью до произвольной функции времени в качестве слагаемого.

Потенциал наиболее полезен в автономном случае, когда он (как и силовое поле) не зависит от времени. В этом случае уравнение движения

$$m_0 \ddot{x} = -U'(x) \quad (2)$$

имеет промежуточный интеграл

$$m_0 \frac{\dot{x}^2}{2} + U(x) = E (= \text{const}), \quad (3)$$

в чем легко убедиться с помощью дифференцирования последнего соотношения по t . Первое слагаемое в левой части представляет собой кинетическую, а второе — потенциальную энергию частицы, так что промежуточный интеграл (3) выражает закон сохранения полной энергии частицы, движущейся под воздействием автономного потенциального силового поля.

Если потенциал $U(x, t)$ представляет собой линейную функцию x , то $\frac{\partial U}{\partial x}$ вообще не зависит от x , т. е. мы приходим к уравнению

$$m_0 \ddot{x} = F(t) \quad (4)$$

движения частицы под действием силы, заданной как функция времени. Мы не будем останавливаться на интегрировании этого уравнения (см., например, ЭПМ, § VII.4), а приведем только окончательный результат

$$x(t) = \frac{1}{m_0} \int_{t_0}^t (t - \tau) F(\tau) d\tau + v_0(t - t_0) + x_0, \quad (5)$$

где

$$x_0 = x|_{t=t_0}, \quad v_0 = \dot{x}|_{t=t_0} \quad (6)$$

— начальные координата и скорость частицы, которые для однозначного определения закона движения частицы надо задать дополнительно. Мы советуем читателю самостоятельно вывести формулу (5) или же просто проверить, что ее правая часть удовлетворяет уравнению (4) и начальным условиям (6).

Если потенциал U представляет собой квадратичную функцию x , то сила F , т. е. правая часть уравнения (1) (или (2) в автономном случае) будет линейной функцией x . На этом случае мы остановимся немного позже.

Сила может быть задана в каждый момент времени как функция x и t , т. е. координаты и скорости частицы; тогда взамен (1) мы приходим к уравнению более общего вида

$$m_0 \ddot{x} = F(x, x, t). \quad (7)$$

Такая сила уже не будет потенциальной; уравнение (7) получается, в частности, если в число сил, действующих на частицу, входит *демпфирующая сила* (например, сила трения), направленная противоположно скорости частицы.

Ограничимся автономным случаем, в котором законы воздействия сил на частицу не зависят от времени. В этом случае уравнение

движения (7) несколько упрощается и приобретает вид

$$m_0 \ddot{x} = F(\dot{x}, x). \quad (8)$$

Оказывается удобным перейти от этого дифференциального уравнения второго порядка к системе из двух дифференциальных уравнений первого порядка, так как такие системы допускают более наглядное истолкование. Для этого введем в рассмотрение *импульс* $p = m_0 \dot{x}$ частицы и перейдем от уравнения (8) к равносильной системе

$$\dot{x} = \frac{1}{m_0} p, \quad \dot{p} = F\left(\frac{p}{m_0}, x\right). \quad (9)$$

Так как для определения конкретного движения частицы, т. е. частного решения уравнения (8) надо задать не только x , но и \dot{x} или, что равносильно, p , то естественно принять, что *состояние* рассматриваемой системы определяется значениями x , p . Плоскость x , p , на которой изображаются всевозможные состояния системы, называется *фазовой плоскостью*, каждому закону $x(t)$ эволюции системы отвечает движение *изображающей точки* $(x(t); p(t))$ на этой плоскости. Система уравнений (9) определяет векторное поле на фазовой плоскости — поле скоростей изображающих точек, каждая из соответствующих линий тока (векторных линий) отвечает возможному закону изменения состояния системы во времени, а весь поток на фазовой плоскости для этого поля скоростей отвечает совокупности всевозможных таких законов.

Поделив одно из уравнений (9) на другое, можно полностью исключить время и перейти к дифференциальному уравнению

$$\frac{dp}{dx} = m_0 \frac{F(p/m_0, x)}{p}$$

траекторий на фазовой плоскости (*фазовых траекторий*). В силу автономности рассматриваемой системы каждая из фазовых траекторий описывает однопараметрическое семейство законов эволюции $x = x(t+c)$, $p = p(t+c)$, получающихся один из другого простым сдвигом во времени.

Важное преимущество рассмотрения движений не на оси x (где они наблюдаются), а в фазовой плоскости состоит в том, что задание точки на оси не определяет траектории частицы, тогда как задание точки в фазовой плоскости полностью определяет эту траекторию (а указание момента времени, отвечающего выбранной точке, полностью определяет и закон движения частицы). Другими словами, различные траектории на оси могут иметь общие точки, тогда как различные траектории на фазовой плоскости не могут иметь общих точек.

Например, две траектории на фазовой плоскости могут иметь вид, показанный на рис. 68; отвечающие им (фактически наблюдаемые)

траектории на оси x заштрихованы. Хотя линии в плоскости не пересекались, но проекция одной из них составляет часть проекции другой.

Траектории частиц, удовлетворяющих неавтономному уравнению (7), также можно изображать на фазовой плоскости. Однако соответствующее поле фазовых скоростей будет нестационарным, и потому такие траектории могут пересекаться друг с другом — ведь для такого поля траектории, начавшиеся в одной и той же точке, но в разные моменты времени, могут быть совершенно различными. Таким образом, в неавтономном случае совокупность всех фазовых траекторий является двухпараметрической (в качестве параметров можно выбрать, например, абсциссу пересечения траекторией оси x и, в добавление к автономному случаю, момент этого пересечения), и потому изображение ее на плоскости не обладает наглядностью.

Итак, с помощью перехода к фазовой плоскости задача об одномерном движении под действием заданных сил сводится к задаче о двумерном движении с заданными скоростями, что дает возможность применить результаты и методы гл. III. Однако происхождение этой последней задачи придает ей определенную специфику, и потому делает целесообразным ее самостоятельное рассмотрение.

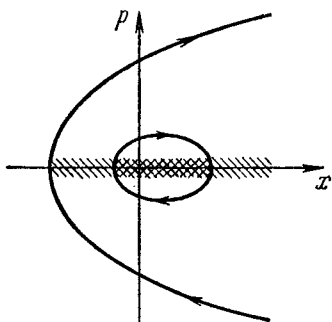


Рис. 68.

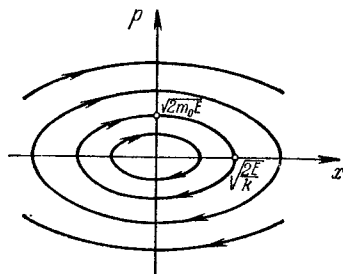


Рис. 69.

Приведем несколько примеров. Упругие колебания линейного осциллятора без трения удовлетворяют уравнению $m_0\ddot{x} + kx = 0$ или, что равносильно, системе

$$\dot{x} = \frac{p}{m_0}, \quad \dot{p} = -kx. \quad (10)$$

Эта система имеет очевидный первый интеграл $\frac{p^2}{2m_0} + \frac{kx^2}{2} = E$, выражающий закон сохранения энергии. В силу этого первого интеграла траекториями (линиями тока) на фазовой плоскости служат эллипсы, причем каждый из них отвечает некоторому уровню

полной энергии E . Эти эллипсы, а также направление движения по ним показаны на рис. 69. (Из первого уравнения (9) видно, что в верхней полуплоскости p изображающая точка всегда движется слева направо, а в нижней — справа налево.) Каждому из этих эллипсов отвечает гармоническое колебание осциллятора с амплитудой $\sqrt{2E/k}$. Хорошо видно, что наибольшему значению $|x|$ отвечает значение $p=0$, а наибольшему значению $|p|$ — значение $x=0$; это означает, что в процессе колебаний происходит перекачка потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Поделив одно из уравнений (10) на другое, мы исключаем t и приходим к уравнению для траекторий $\frac{dp}{dx} = -km_0 \frac{x}{p}$, из которого формально следует, что начало координат будет особой точкой (ЭПМ, § VIII.1). Впрочем, это ясно непосредственно из рис. 69, причем видно также, что это особая точка типа центра.

Если ввести в осциллятор линейное трение, то взамен (10) получится система уравнений

$$\dot{x} = \frac{p}{m_0}, \quad \dot{p} = -kx - \frac{\lambda}{m_0} p, \quad (11)$$

в которой λ — коэффициент трения. Если трение невелико (см. упражнение 1), то при любом начальном состоянии в системе возникнут затухающие колебания, т. е. начало координат на фазовой

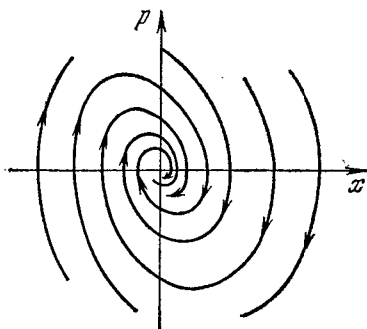


Рис. 70.

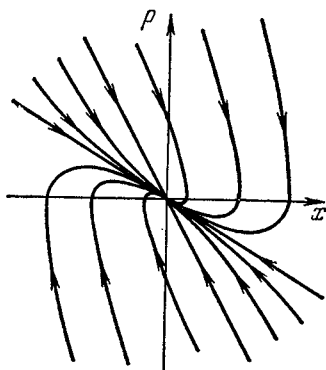


Рис. 71.

плоскости будет особой точкой типа фокуса (рис. 70). Если же трение велико, то затухание будет аperiodическим, чему отвечает особая точка типа узла (рис. 71). (Различные виды затухания рассмотрены в ЭПМ, § VII.3.)

Рассмотрим теперь систему без трения, в которой частица отталкивается от начала координат по линейному закону. Уравнения эволюции такой системы на фазовой плоскости имеют

ВИД

$$\dot{x} = \frac{p}{m_0}, \quad \dot{p} = kx, \quad (12)$$

закон сохранения энергии — вид $\frac{p^2}{2m_0} - \frac{kx^2}{2} = E$. Траекториями на фазовой плоскости служат гиперболы, начало координат является особой точкой типа седла (рис. 72). Траекториям типа 11 отвечают такие движения частицы, когда она, приближаясь к точке отталкивания $x=0$, обладает достаточным запасом кинетической энергии для того, чтобы пересечь эту точку и удалиться в противоположную сторону. Если запас кинетической энергии недостаточен, то частица не доходит до точки отталкивания и возвращается в ту же сторону, из которой прибыла; при этом получается траектория типа 22. Разделяет эти два типа траектория 30, называемая *сепаратрисой*; для нее кинетическая энергия как раз достаточна, чтобы частица асимптотически приближалась к точке отталкивания.

Рассмотрим теперь произвольную автономную систему без демпфирования, описываемую дифференциальным уравнением (2), равносильным системе

$$\dot{x} = \frac{p}{m_0}, \quad \dot{p} = -U'(x). \quad (13)$$

Соотношение (3) можно переписать в виде первого интеграла этой системы: $\frac{p^2}{2m_0} + U(x) = E$.

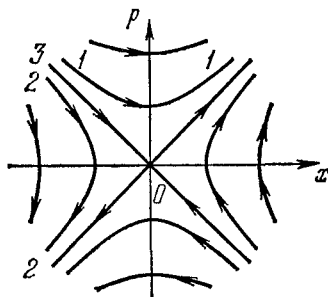


Рис. 72.

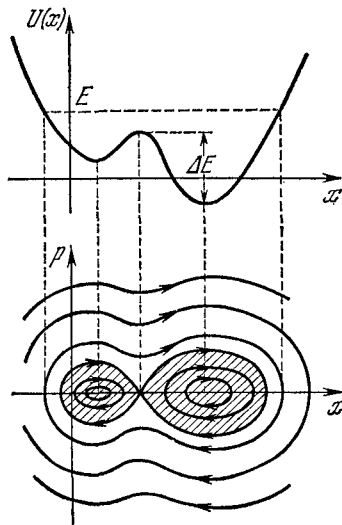


Рис. 73.

Знание потенциальной энергии $U(x)$ позволяет легко построить семейство траекторий на фазовой плоскости. Такое построение показано на рис. 73, который мы предлагаем читателю продумать самостоятельно. На этом рисунке частица имеет три состояния равновесия: левое, устойчивое, с меньшим запасом устойчивости (величиной потенциального барьера); среднее, неустойчивое; и правое,

устойчивое, с большим запасом устойчивости. Заштрихованные окрестности устойчивых состояний равновесия, заполненные *финитными* (т. е. расположенными в конечной части плоскости) траекториями и ограниченными сепаратрисами, называются *потенциальными ямами*. Глубина ΔE потенциальной ямы (величина *потенциального барьера*) определяет запас устойчивости частицы в исходном состоянии равновесия, т. е. максимально возможную добавку энергии, для которой частица остается в потенциальной яме и при как угодно малой диссипации энергии асимптотически придет в это состояние равновесия. (На рис. 73 показано значение ΔE только для правого состояния равновесия.)

Функция

$$H(x, p) = \frac{p^2}{2m_0} + U(x), \quad (14)$$

равная полной энергии системы (т. е. в данном случае — частицы в заданном силовом поле) и постоянная вдоль каждой траектории на фазовой плоскости, называется *функцией Гамильтона* (*гамильтонианом*) рассматриваемой системы. Другими словами, для системы с одной степенью свободы траектории на фазовой плоскости совпадают с линиями уровня функции Гамильтона. Так как

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m_0}, \quad \frac{\partial H}{\partial x} = U'(x) = -F(x),$$

то систему (13) можно с помощью функции Гамильтона записать в *каноническом виде*

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \quad (15)$$

Если потенциал U зависит также и от времени, $U = U(x, t)$ (система неавтономная), то уравнения движения частицы все равно можно записать в каноническом виде (15), где

$$H = H(x, p, t) = \frac{p^2}{2m_0} + U(x, t).$$

Однако теперь уже гамильтониан H в процессе движения частицы не остается постоянным, так как

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial H}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \left(-\frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial t}.$$

Подчеркнем, что общее уравнение (7), правая часть которого включает x , в переменных $x, p = m_0 \dot{x}$ не принимает канонического вида (15).

Упражнения

1. Укажите, когда для системы (11) особая точка будет фокусом и когда — узлом. В последнем случае укажите направления, по которым траектории на фазовой плоскости могут входить в начало координат.

2. Рассмотрите систему с отталкиванием (12) с добавленным линейным трением.

3. Выведите уравнение колебаний математического маятника без трения и рассмотрите соответствующую картину траекторий на фазовой плоскости.

§ 2. Прямолинейное движение совокупности частиц

Рассмотрим теперь систему из N невзаимодействующих одинаковых частиц массы m_0 , движущихся вдоль оси x в силовом поле F , действующем на каждую из частиц так, как это описано в § 1. Для общего случая, когда эта сила может зависеть от координаты и скорости частицы, а также от времени, уравнения движения системы частиц принимают вид

$$m_0 \ddot{x}_i = F(\dot{x}_i, x_i, t) \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (1)$$

Мы будем считать, что эта система в каждый момент времени имеет разброс не только по координате x , но и при каждом значении x по импульсу p (или, что то же, — по скорости \dot{x}), другими словами, в отличие от гл. II, теперь уже близкие частицы не обязаны иметь близкие скорости. (Но частицы, имеющие близкие координаты и близкие скорости, должны иметь близкие ускорения, что вытекает из уравнений (1).) Так как силовое поле определяет ускорения частиц, но не определяет их скорости, то указанный разброс, если он был в начальный момент времени, сохранится и в дальнейшие моменты, т. е. совокупность частиц в каждый момент времени будет теперь двухпараметрической. В частности, теперь уже ничто не мешает частицам в процессе эволюции системы обгонять одна другую; как и в § II.1, мы будем считать, что и при таком обгоне частицы не взаимодействуют друг с другом. При непрерывном разбросе скоростей такой «перехлест» происходит во все моменты времени во всех точках и потому, в отличие от ситуации, описанной в § II.10, после перехода к среде не приводит к появлению точек, в которых плотность среды бесконечна.

От системы (1) из N уравнений второго порядка можно перейти к равносильной системе из $2N$ уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m_0}, \quad \dot{p}_i = F\left(\frac{p_i}{m_0}, x_i, t\right) \quad (i=1, 2, \dots, N). \quad (2)$$

Поэтому состояние рассматриваемой системы частиц определяется указанием координат и импульсов каждой из частиц, т. е. может быть изображено точкой в $2N$ -мерном фазовом пространстве координат-импульсов. Однако для невзаимодействующих идентичных частиц, находящихся в едином поле сил, это изображение можно упростить, заметив, что законы движения различных частиц служат различными частными решениями одного и того же уравнения второго порядка (1.7). Поэтому состояние такой системы можно изображать