2. Рассмотрите систему с отталкиванием (12) с добавленным линейным трением.

3. Выведите уравнение колебаний математического маятника без трения и рассмотрите соответствующую картину траекторий на фазовой плоскости.

§ 2. Прямолинейное движение совокупности частиц

Рассмотрим теперь систему из N невзаимодействующих одинаковых частиц массы m_0, движущихся вдоль оси x в силовом поле F, действующем на каждую из частиц так, как это описано в § 1. Для общего случая, когда эта сила может зависеть от координаты и скорости частицы, а также от времени, уравнения движения системы частиц принимают вид

$$m_0\ddot{x}_i=F(\dot{x}_i,\ x_i,\ t)\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{1}$$

Мы будем считать, что эта система в каждый момент времени имеет разброс не только по координате x, но и при каждом значении x по импульсу p (или, что то же,— по скорости $\dot{x}$), другими словами, в отличие от гл. II, теперь уже близкие частицы не обязаны иметь близкие скорости. (Но частицы, имеющие близкие координаты и близкие скорости, должны иметь близкие ускорения, что вытекает из уравнений (1).) Так как силовое поле определяет ускорения частиц, но не определяет их скорости, то указанный разброс, если он был в начальный момент времени, сохранится и в дальнейшие моменты, т. е. совокупность частиц в каждый момент времени будет теперь двухпараметрической. В частности, теперь уже ничто не мешает частицам в процессе эволюции системы обгонять одна другую; как и в § II.1, мы будем считать, что и при таком обгоне частицы не взаимодействуют друг с другом. При непрерывном разбросе скоростей такой «перехлест» происходит во все моменты времени во всех точках и потому, в отличие от ситуации, описанной в § II.10, после перехода к среде не приводит к появлению точек, в которых плотность среды бесконечна.

От системы (1) из N уравнений второго порядка можно перейти к равносильной системе из $2N$ уравнений первого порядка

$$\dot{x}_i=\frac{p_i}{m_0},\qquad \dot{p}_i=F\left(\frac{p_i}{m_0},\ x_i,\ t\right)\qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ N). \tag{2}$$

Поэтому состояние рассматриваемой системы частиц определяется указанием координат и импульсов каждой из частиц, т. е. может быть изображено точкой в $2N$-мерном фазовом пространстве координат-импульсов. Однако для невзаимодействующих идентичных частиц, находящихся в едином поле сил, это изображение можно упростить, заметив, что законы движения различных частиц служат различными частными решениями одного и того же уравнения второго порядка (1.7). Поэтому состояние такой системы можно изображать совокупностью N точек на одной и той же фазовой плоскости, отвечающей любой из рассматриваемых частиц *).

Как и в § 1, такое изображение особенно наглядно, если силовое поле, а потому и системы (1) и (2) автономны, т. е. не зависят от t. В этом случае фазовая плоскость расслаивается на фазовые траектории, не пересекающиеся друг с другом, по которым движутся N точек, изображающих в совокупности рассматриваемую систему частиц.

Если рассматриваемая система автономна и силы не зависят от скоростей частиц, то систему уравнений (2) можно переписать в виде

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m_0}, \qquad \dot{p}_i = -U'(x_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N), \tag{3}$$

где $U(x)$ — потенциал силового поля. В этом случае полная энергия каждой частицы сохраняется:

$$\frac{p_i^2}{2m_0} + U(x_i) = E_i \ (= \mathrm{const};\ i = 1, 2, \ldots, N)$$

(здесь проявился эффект невзаимодействия!). Полная энергия такой системы

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_N, p_1, p_2, \ldots, p_N) = \\ = \frac{1}{2m_0}(p_1^2 + p_2^2 + \ldots + p_N^2) + U(x_1) + U(x_2) + \ldots + U(x_N) \tag{4}$$

называется ее функцией Гамильтона и, конечно, также остается постоянной в любом процессе ее свободной эволюции. С помощью этой функции уравнения (3) движения системы можно записать в каноническом виде

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} \qquad (1, 2, \ldots, N). \tag{5}$$

Функцию Гамильтона (4) для всей системы можно представить в виде суммы соответствующих функций для каждой отдельной

*) В $2N$-мерном фазовом пространстве координат-импульсов можно изобразить любую систему с N степенями свободны, эволюционирующую под действием произвольных сил,— в частности, систему из N взаимодействующих, не обязательно идентичных частиц, движущихся вдоль оси x. К фазовой плоскости можно перейти, если частицы идентичны; но если они взаимодействуют, то скорость каждой из N изображающих точек $(x_i;\ p_i)$ будет зависеть от положения остальных точек, так что для отыскания закона движения каждой из этих точек надо интегрировать систему из $2N$ дифференциальных уравнений 1-го порядка, не распадающуюся на независимые подсистемы. И лишь для невзаимодействующих идентичных частиц, находящихся в едином силовом поле, можно поведение отдельных изображающих точек на фазовой плоскости рассматривать независимо друг от друга, а упомянутая система дифференциальных уравнений распадается на N независимых подсистем (2). В этом случае применение фазовой плоскости наиболее удобно.

частицы:

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_N, p_1, p_2, \ldots, p_N) \equiv \\ \equiv H_0(x_1, p_1) + H_0(x_2, p_2) + \ldots + H_0(x_N, p_N),$$

где через H_0 обозначен гамильтониан (1.14) отдельной частицы. Такое представление опять-таки объясняется отсутствием взаимодействия частиц.

§ 3. Изображение среды из частиц на фазовой плоскости

Если число N частиц становится весьма большим или если, подобно § II.14, мы переходим к статистическому осреднению, то естественно, как и в предыдущих главах, схематизировать систему как сплошную среду (среду из частиц). Будем, как и выше, считать частицы идентичными и невзаимодействующими, так что движение каждой из них описывается системой из двух уравнений 1-го порядка (2.2).

Мы видели в § 2, что такую систему частиц удобно изображать в виде совокупности изображающих точек на фазовой плоскости x, p, так как указание положения частицы на фазовой плоскости (мы будем иногда для краткости говорить «положение частицы на фазовой плоскости» вместо «положение точки, изображающей частицу на фазовой плоскости») в некоторый момент времени полностью определяет эволюцию этой частицы. Для перехода к среде введем *фазовую плотность* $n^{\Phi}(x, p, t)$ числа частиц; другими словами, пусть число частиц в момент t, координата которых заключена между x и $x+\Delta x$, а импульс — между p и $p+\Delta p$, при малых Δx и Δp равно, с точностью до малых высшего порядка,

$$\Delta N = n^{\Phi}(x, p, t)\, \Delta x\, \Delta p.$$

Подчеркнем, что n^{Φ}— это не плотность n числа частиц на оси, вдоль которой они движутся (см. § I.2), n^{Φ} зависит также от p и учитывает разброс ансамбля частиц не только по координатам, но и по импульсам. Это видно уже из размерностей:

$$[n] = [l]^{-1}, \qquad [n^{\Phi}] = [l]^{-2}[m]^{-1}[t].$$

Чтобы получить обычную (не фазовую) плотность $n(x, t)$ числа частиц рассматриваемой среды в точке с координатой x в момент t, надо просуммировать при данном x частицы со всеми импульсами, т. е.

$$n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} n^{\Phi}(x, p, t)\, dp.$$

Закон распределения частиц среды на фазовой плоскости является важнейшей характеристикой этой среды. Знание фазовой