частицы:

$$H(x_1, x_2, \ldots, x_N, p_1, p_2, \ldots, p_N) \equiv$$
$$\equiv H_0(x_1, p_1) + H_0(x_2, p_2) + \ldots + H_0(x_N, p_N),$$

где через H_0 обозначен гамильтониан (1.14) отдельной частицы. Такое представление опять-таки объясняется отсутствием взаимодействия частиц.

§ 3. Изображение среды из частиц на фазовой плоскости

Если число N частиц становится весьма большим или если, подобно § II.14, мы переходим к статистическому осреднению, то естественно, как и в предыдущих главах, схематизировать систему как сплошную среду (среду из частиц). Будем, как и выше, считать частицы идентичными и невзаимодействующими, так что движение каждой из них описывается системой из двух уравнений 1-го порядка (2.2).

Мы видели в § 2, что такую систему частиц удобно изображать в виде совокупности изображающих точек на фазовой плоскости x, p, так как указание положения частицы на фазовой плоскости (мы будем иногда для краткости говорить «положение частицы на фазовой плоскости» вместо «положение точки, изображающей частицу на фазовой плоскости») в некоторый момент времени полностью определяет эволюцию этой частицы. Для перехода к среде введем *фазовую плотность* $n^\Phi(x, p, t)$ числа частиц; другими словами, пусть число частиц в момент t, координата которых заключена между x и $x+\Delta x$, а импульс — между p и $p+\Delta p$, при малых Δx и Δp равно, с точностью до малых высшего порядка,

$$\Delta N = n^\Phi(x, p, t)\,\Delta x\,\Delta p.$$

Подчеркнем, что n^Φ — это не плотность n числа частиц на оси, вдоль которой они движутся (см. § I.2), n^Φ зависит также от p и учитывает разброс ансамбля частиц не только по координатам, но и по импульсам. Это видно уже из размерностей:

$$[n] = [l]^{-1}, \qquad [n^\Phi] = [l]^{-2}[m]^{-1}[t].$$

Чтобы получить обычную (не фазовую) плотность $n(x, t)$ числа частиц рассматриваемой среды в точке с координатой x в момент t, надо просуммировать при данном x частицы со всеми импульсами, т. е.

$$n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} n^\Phi(x, p, t)\,dp.$$

Закон распределения частиц среды на фазовой плоскости является важнейшей характеристикой этой среды. Знание фазовой плотности n^Φ дает возможность найти и другие основные характеристики среды — такие, как фазовая массовая плотность $\rho^\Phi = m_0 n^\Phi$, обычная плотность

$$\rho(x, t) = m_0 n(x, t) = m_0 \int_{-\infty}^{\infty} n^\Phi(x, p, t)\,dp, \tag{1}$$

статический момент и т. д., и полностью проследить за эволюцией среды. Такое упрощенное описание среды является основной идеей физической статистики и особенно полезно в тех случаях, когда изучение совокупности всех траекторий затруднительно (например, для пространственных движений). Очень часто это изучение является и ненужным, избыточным: например, если мы узнаем, что $n^\Phi = \text{const}$, то нам, как правило, несущественно знать, как движутся отдельные частицы! Итак, система с большим числом степеней свободы обладает качественно новой характеристикой, позволяющей описать наиболее глубокие свойства этой системы.

Приведем еще выражения через n^Φ суммарного импульса P частиц, попавших на интервал $a \leqslant x \leqslant b$:

$$P_{a,b} = \int_a^b dx \int_{-\infty}^{\infty} p n^\Phi\,dp; \tag{2}$$

плотности этого импульса

$$\rho_p = \int_{-\infty}^{\infty} p n^\Phi\,dp; \tag{3}$$

плотности кинетической, потенциальной и полной энергий соответственно

$$\begin{gathered}\rho_T = \frac{1}{2m_0} \int_{-\infty}^{\infty} p^2 n^\Phi\,dp, \qquad \rho_U = m_0 \int_{-\infty}^{\infty} n^\Phi\,dp \cdot u(x, t),\\ \rho_E = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{p^2}{2m_0} + m_0 u\right) n^\Phi\,dt,\end{gathered} \tag{4}$$

где под $u(x, t)$ понимается потенциал, отнесенный к единице массы (он называется *приведенным потенциалом* или *потенциалом ускорений*), т. е. $F = -m_0 \frac{\partial u}{\partial x}$. Через плотности энергий очевидным образом выражаются и сами энергии.

Обращаем внимание на то, что в приведенных формулах фигурирует m_0 — масса отдельной частицы. Таким образом, при переходе к непрерывной среде мы не полагаем $m_0 \to 0$, а пользуемся осреднением. Если взамен p пользоваться в качестве фазовой координаты скоростью $\dot{x} = \frac{p}{m_0}$ частицы, то можно было бы положить $m_0 \to 0$.

Но в ряде отношений фазовая координата p оказывается более удобной — например, при рассмотрении взаимодействующих частиц различной массы или при учете релятивистских эффектов, в частности, при рассмотрении частиц с нулевой массой покоя. Поэтому мы будем применять в качестве фазовых координат именно x, p.

Дифференциальные уравнения движения частиц среды на фазовой плоскости имеют тот же вид (2.2), т. е.

$$\dot{x}=\frac{p}{m_0}, \qquad \dot{p}=F\left(\frac{p}{m_0}, x, t\right). \tag{5}$$

Если обозначить через $\boldsymbol{e}_x$ и $\boldsymbol{e}_p$ единичные векторы осей x и p, то из уравнений (5) получим

$$\dot{x}\boldsymbol{e}_x+\dot{p}\boldsymbol{e}_p=\frac{p}{m_0}\boldsymbol{e}_x+F\left(\frac{p}{m_0}, x, t\right)\boldsymbol{e}_p. \tag{6}$$

Левая часть этого равенства представляет собой вектор скорости $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(x, p, t)$ потока частиц в плоскости x, p. Таким образом, если считать силовое поле $F(\dot{x}, x, t)$ заданным, то равенство (6) задает поле скоростей (вообще говоря, нестационарное) потока среды, изображенного на плоскости x, p. Как мы уже упоминали, в этом состоит удобство перехода от оси координат частиц к фазовой плоскости, так как на оси x силовое поле не задает поля скоростей. Отметим, кстати, что если сила F, действующая на частицы, зависит не только от x и t, но и от $\dot{x}$, то точнее говорить о силовом поле в фазовой плоскости, а не на оси x.

Переменные x, p в фазовой плоскости играют роль эйлеровых координат. Наряду с ними можно применять лагранжевы координаты

$$x_0=x\,|_{t=t_0}, \qquad p_0=p\,|_{t=t_0}. \tag{7}$$

Это делается в точности, как в § I.4, поэтому мы не будем на этом задерживаться.

Уравнение неразрывности в фазовой плоскости, выражающее закон сохранения массы каждой порции частиц, вытекает из § I.8. Так, формула (I.8.4), которую из-за неравноправия фазовых координат лучше переписать в координатной форме, с учетом формулы (6) приобретает вид

$$\frac{\partial n^{\Phi}}{\partial t}+\frac{p}{m_0}\frac{\partial n^{\Phi}}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial p}\left[F\left(\frac{p}{m_0}, x, t\right)n^{\Phi}\right]=0, \tag{8}$$

формула (I.8.6) — вид

$$\frac{dn^{\Phi}}{dt}+\frac{\partial F}{\partial p}n^{\Phi}=0; \tag{9}$$

здесь производная $\frac{d}{dt}$ берется вдоль фазовой траектории $x=x(t)$, $p=p(t)$. Система уравнений (5) — это система дифференциальных уравнений характеристик для уравнения с частными производными (8).

Уравнение неразрывности (I.8.7) в лагранжевых координатах теперь выглядит так:

$$\frac{d}{dt}\left(n^{\Phi}\,\frac{D(x,\,p)}{D(x_0,\,p_0)}\right)=0 \tag{10}$$

(в силу § III.3 якобиан в этом уравнении можно писать без знака абсолютной величины).

Отметим важный частный случай: пусть $F=F(x,\,t)$, т. е. силы, действующие на частицы, не зависят от их скорости (но могут зависеть от времени, т. е. силовое поле может быть нестационарным!). Тогда из уравнения (9) мы видим, что $\frac{dn^{\Phi}}{dt}=0$, т. е. каждый элемент среды на фазовой плоскости в процессе своей эволюции не меняет фазовой плотности. (Впрочем, отсюда, конечно, не следует, что и $\frac{dn}{dt}=0$, более того, из-за рассеяния скорости, т. е. отсутствия единой скорости частиц в фиксированной точке оси x, выражение $\frac{dn}{dt}$ не имеет смысла!)

Упражнения

1. Истолкуйте смысл каждого члена уравнения (8) и выведите это уравнение непосредственно, исходя из полученного истолкования.

2. Пусть $F(\dot{x},\,x,\,t)=-m_0\omega^2x$ ($\omega=\text{const}>0$) (осциллирующая среда). Положив $t_0=0$, выведите формулы, связывающие эйлеровы координаты с лагранжевыми. Напишите уравнение неразрывности в формах (8), (9) и (10).

§ 4. Законы сохранения

Мы вывели уравнение неразрывности (3.8), исходя из предположения о сохранении числа частиц. Мы сейчас покажем, что и обратно, из этого уравнения, не находя его решений, можно вывести ряд законов сохранения.

1. *Закон сохранения массы.* Исходя из формулы (3.1) для плотности, получаем формулу для общей массы:

$$M=m_0\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}n^{\Phi}(x,\,p,\,t)\,dp.$$

Более коротко мы запишем эту формулу в виде

$$M=m_0\iint n^{\Phi}(x,\,p,\,t)\,dx\,dp, \tag{1}$$

полагая здесь и далее, что если пределы интегрирования не обозначены, то переменные интегрирования пробегают их максимально