уравнений характеристик для уравнения с частными производными (8).

Уравнение неразрывности (I.8.7) в лагранжевых координатах теперь выглядит так:

$$\frac{d}{dt}\left(n^{\Phi}\frac{D(x,\ p)}{D(x_0,\ p_0)}\right)=0 \tag{10}$$

(в силу § III.3 якобиан в этом уравнении можно писать без знака абсолютной величины).

Отметим важный частный случай: пусть $F=F(x,\ t)$, т. е. силы, действующие на частицы, не зависят от их скорости (но могут зависеть от времени, т. е. силовое поле может быть нестационарным!). Тогда из уравнения (9) мы видим, что $\frac{dn^{\Phi}}{dt}=0$, т. е. каждый элемент среды на фазовой плоскости в процессе своей эволюции не меняет фазовой плотности. (Впрочем, отсюда, конечно, не следует, что и $\frac{dn}{dt}=0$, более того, из-за рассеяния скорости, т. е. отсутствия единой скорости частиц в фиксированной точке оси x, выражение $\frac{dn}{dt}$ не имеет смысла!)

Упражнения

1. Истолкуйте смысл каждого члена уравнения (8) и выведите это уравнение непосредственно, исходя из полученного истолкования.

2. Пусть $F(\dot{x},\ x,\ t)=-m_0\omega^2x$ ($\omega=\mathrm{const}>0$) (осциллирующая среда). Положив $t_0=0$, выведите формулы, связывающие эйлеровы координаты с лагранжевыми. Напишите уравнение неразрывности в формах (8), (9) и (10).

§ 4. Законы сохранения

Мы вывели уравнение неразрывности (3.8), исходя из предположения о сохранении числа частиц. Мы сейчас покажем, что и обратно, из этого уравнения, не находя его решений, можно вывести ряд законов сохранения.

1. *Закон сохранения массы.* Исходя из формулы (3.1) для плотности, получаем формулу для общей массы:

$$M=m_0\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}n^{\Phi}(x,\ p,\ t)\,dp.$$

Более коротко мы запишем эту формулу в виде

$$M=m_0\iint n^{\Phi}(x,\ p,\ t)\,dx\,dp, \tag{1}$$

полагая здесь и далее, что если пределы интегрирования не обозначены, то переменные интегрирования пробегают их максимально возможную область изменения (т. е. в данном случае от $-\infty$ до ∞), и заметив, что порядок интегрирования здесь несуществен.

Для сходимости интеграла (1) мы будем считать, что функция $n^{\Phi}(x, p, t)$ для достаточно больших $|x|$, $|p|$ либо тождественно равна нулю (такие функции называются *финитными*), либо стремится к нулю с достаточной скоростью, так что все рассматриваемые интегралы будут сходящимися и с ними можно действовать как с обычными, «собственными» интегралами. Это означает, что на бесконечности масса не порождается и не поглощается.

В правую часть (1) время t входит как параметр. Для выяснения зависимости M от t продифференцируем обе части (1) по t:

$$\frac{dM}{dt} = m_0 \iint \frac{\partial n^{\Phi}}{\partial t}\, dx\, dp.$$

Воспользуемся уравнением неразрывности (3.8), которому должна удовлетворять функция $n^{\Phi}(x, p, t)$:

$$\frac{dM}{dt} = -\iint p\, \frac{\partial n^{\Phi}}{\partial x}\, dx\, dp - m_0 \iint \frac{\partial (F n^{\Phi})}{\partial p}\, dx dp. \tag{2}$$

Выполнив во втором слагаемом интегрирование сначала по p, мы получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial (F n^{\Phi})}{\partial p}\, dp = (F n^{\Phi}) \Big|_{p=-\infty}^{\infty};$$

в силу предположения, сделанного в предыдущем абзаце, это выражение, а с ним и все второе слагаемое в правой части (2) равны нулю. Первое также равно нулю, что видно, если выполнить в нем интегрирование сначала по x. Таким образом, $\frac{dM}{dt} = 0$, т. е. $M = \text{const}$, суммарная масса частиц в процессе эволюции среды сохраняется.

Конечно, сохранение массы было ясно с самого начала, на этом сохранении был основан вывод уравнения неразрывности (3.8), а этим уравнением мы воспользовались при исследовании интеграла (1). Таким образом, приведенное рассуждение никак нельзя считать доказательством закона сохранения масс, это рассуждение показывает, что закон сохранения масс можно формально вывести из уравнения (3.8), и тем самым подтверждает, что это уравнение адекватно (во всяком случае, в данном отношении) описывает реальные процессы.

Здесь полезно напомнить, что всякое математическое уравнение описывает реальные процессы лишь приближенно, с большей или меньшей точностью. В данном случае такая приближенность произошла уже из-за осреднения, примененного при переходе от совокупности частиц к сплошной среде, в других случаях при выводе уравнений могут применяться гораздо более грубые допущения, отбрасывания факторов, принимаемых за малосущественные, и т. п. Поэтому правильность уравнения, адекватность его реальным процессам не может быть доказана чисто математически, она вытекает из сопоставления следствий из этого уравнения с реальностью, с экспериментом, с физическими законами. При этом особую роль играет получение в качестве следствий из изучаемого уравнения наиболее важных известных свойств, универсальных законов, так как каждое такое следствие служит подтверждением правильности уравнения.

К доказанному закону сохранения, а также и к двум другим, речь о которых пойдет ниже, возможен также следующий подход. Рассмотрим сначала движение частицы единичной массы, имевшей в момент $t=t_0$ координату x_0 и импульс p_0. Закон сохранения массы для этой частицы можно записать в виде

$$\iint G(x,\ p,\ t;\ x_0,\ p_0,\ t_0)\,dx\,dp \equiv 1 \quad (\text{при всех } t), \tag{3}$$

где G — фазовая плотность, отвечающая этой частице в момент t, т. е. соответствующая функция влияния (она, конечно, имеет дельтаобразный характер!) для фазовой плотности. Если теперь в момент $t=t_0$ было произвольное распределение фазовой плотности $n_0^{\Phi}(x_0,\ p_0)$, то пользуясь соотношением

$$\iint G(x,\ p,\ t;\ x_0,\ p_0,\ t_0)\,n_0^{\Phi}(x_0,\ p_0)\,dx_0\,dp_0 = n^{\Phi}(x,\ p,\ t),$$

из (3) получаем

$$\iint n^{\Phi}(x,\ p,\ t)\,dx\,dp = \iiiint G(x,p,t;x_0,p_0,t_0)\,n_0^{\Phi}(x_0,p_0)\,dx_0\,dp_0\,dx\,dp = \\ = \iint n_0^{\Phi}(x_0,\ p_0)\,dx_0\,dp_0 = \mathrm{const},$$

что и требовалось доказать.

2. *Закон сохранения суммарного импульса P (закон сохранения количества движения) при отсутствии сил.*

В силу формулы (3.2)

$$P = \iint p n^{\Phi}(x,\ p,\ t)\,dx\,dp.$$

Рассуждая, как в п. 1, найдем

$$\frac{dP}{dt} = -\iint p\,\frac{\partial (F n^{\Phi})}{\partial p}\,dx\,dp. \tag{4}$$

В частности, если $F\equiv 0$, т. е. силы отсутствуют (движение частиц свободное), то $\frac{dP}{dt}=0$, т. е. $P=\mathrm{const}$, суммарное количество движения среды сохраняется.

Если в правой части (4) внутреннее интегрирование производить по p и осуществить интегрирование по частям, мы получим

$$\frac{dP}{dt}=\iint Fn^{\Phi}\,dx\,dp.$$

Эта формула выглядит наиболее просто, если сила, действующая на частицу, зависит только от координаты этой частицы, $F=F(x,\ t)$. Выполняя внутреннее интегрирование по p и пользуясь формулой (3.1), приходим к равенству

$$\frac{dP}{dt}=\frac{1}{m_0}\int\rho(x,\ t)\,F(x,\ t)\,dx.$$

Отсюда получаем более общее достаточное условие сохранения суммарного импульса P:

$$\int\rho F\,dx=0. \qquad (5)$$

Отметим, что при этом из-за действия силы количество движения отдельных частиц меняется, но при выполнении условия (5) возрастание количества движения у одних частиц компенсируется убыванием его у других.

3. *Закон сохранения энергии при потенциальных автономных силах.* В силу последней формулы (3.4) в рассматриваемом случае получим выражение полной энергии для среды из частиц

$$E=\frac{1}{2m_0}\iint p^2n^{\Phi}(x,\ p,\ t)\,dx\,dp+m_0\iint u(x)\,n^{\Phi}(x,\ p,\ t)\,dx\,dp;$$

при этом первое слагаемое в правой части равно кинетической энергии, а второе — потенциальной энергии среды.

Проверим, что E не зависит от времени t, для чего вычислим

$$\frac{dE}{dt}=\frac{1}{2m_0}\int dx\int p^2\left[-\frac{p}{m_0}\frac{\partial n^{\Phi}}{\partial x}+m_0\frac{\partial}{\partial p}(u'(x)\,n^{\Phi})\right]dp+$$
$$+m_0\int u(x)\,dx\int\left[-\frac{p}{m_0}\frac{\partial n^{\Phi}}{\partial x}+m_0\frac{\partial}{\partial p}(u'(x)\,n^{\Phi})\right]dp.$$

Если раскрыть квадратные скобки и каждый из интегралов разбить на два, то после интегрирования производных первое слагаемое в первом интеграле и второе во втором обратятся в нуль. Оставшиеся два слагаемых перепишем в виде

$$\frac{1}{2}\int u'(x)\,dx\int p^2\frac{\partial n^{\Phi}}{\partial p}\,dp-\int p\,dp\int u(x)\,\frac{\partial n^{\Phi}}{\partial x}\,dx;$$

они взаимно уничтожаются после интегрирования внутренних интегралов по частям (проверьте!). Таким образом, $\frac{dE}{dt}=0$, т. е. $E=\mathrm{const}$, суммарная полная энергия среды сохраняется. Конечно, при этом кинетическая и потенциальная энергия среды, вообще говоря, меняются, сохраняется только их сумма.

С законами сохранения непосредственно связаны выражения баланса рассмотренных величин на конечном или полубесконечном интервалах оси x. Ограничимся для простоты полубесконечным интервалом $a \leqslant x < \infty$. Масса среды на нем равна

$$M_{a,\,\infty} = m_0 \int_a^\infty dx \int_{-\infty}^\infty n^\Phi (x,\, p,\, t)\, dp.$$

Вычисления, аналогичные проведенным в п. 1, дают

$$\frac{d}{dt} M_{a,\,\infty} = -\int_{-\infty}^\infty p\, dp \int_a^\infty \frac{\partial n^\Phi}{\partial x}\, dx = \int_{-\infty}^\infty n^\Phi (a, p, t)\, p\, dp = \rho_p (a,\, t), \tag{6}$$

где ρ_p означает плотность импульса среды (см. (3.3)). Отсюда, в частности, получаем, что ρ_p есть поток массы (§ I.6) и что для стационарного процесса должно быть $\rho_p(x) \equiv 0$.

Аналогичное рассмотрение импульса

$$P_{a,\,\infty} = \int_a^\infty dx \int_{-\infty}^\infty p n^\Phi (x,\, p,\, t)\, dp,$$

которое мы предоставляем читателю, приводит к формуле

$$\frac{d}{dt} P_{a,\,\infty} = \int_a^\infty dx \int_{-\infty}^\infty F n^\Phi\, dp + \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^\infty n^\Phi (a,\, p,\, t)\, p^2\, dp. \tag{7}$$

Таким образом, изменение импульса на интервале объясняется, во-первых, действием силы F, ускоряющей или замедляющей частицы, и, во-вторых, тем, что через конец a интервала происходит обмен частицами, обладающими импульсом, с остальной частью оси x. Поэтому второе слагаемое в правой части (7) представляет собой поток импульса

$$q_P (a,\, t) = \frac{1}{m_0} \int_{-\infty}^\infty n^\Phi (a,\, p,\, t)\, p^2\, dp = 2\rho_T \big|_{x=a} \tag{8}$$

(см. первую формулу (3.4)). Оно имеет размерность силы и его естественно интерпретировать как *силу давления* среды в точке $x=a$. Аналогично тому, как говорилось в § I.6, давление в данном рассмотрении отнюдь не связано со столкновениями частиц, так как мы все время считаем, что частицы не взаимодействуют; оно порождается переносом импульса частицами через рассматриваемое сечение. При этом, поскольку p под знак интеграла (8) входит в квадрате, при подсчете давления несущественно, входят ли частицы через это сечение в интервал $a \leqslant x \leqslant \infty$, выходят из него или имеются как входящие, так и выходящие частицы: все они вносят в давление положительный вклад.

Если рассматривается стационарный процесс, то левая часть равенства (7) равна нулю и, дифференцируя это равенство по a, а затем заменяя a на произвольное x, получим соотношение

$$\frac{dq_P}{dx} = \int_{-\infty}^{\infty} F n^{\Phi} dp.$$

Оно особенно просто, если сила, действующая на частицы, зависит только от их координаты, так как тогда

$$\frac{dq_P}{dx} = F \int n^{\Phi} dp = \frac{1}{m_0} F(x) \rho(x) \; (= -u'(x) \rho(x)).$$

Если умножить обе части на dx, то в правой части получится внешняя сила, действующая на элемент dx, т. е. мы приходим к очевидному условию статического равновесия; этим оправдывается истолкование выражения (8) как силы давления.

Приведем еще формулы для скорости изменения кинетической энергии $T_{a,\infty}$ и потенциальной энергии $U_{a,\infty}$ среды в случае потенциальных автономных сил (вывод этих формул мы также предоставляем читателю):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} T_{a,\infty} &= \frac{1}{2m_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} p^3 n^{\Phi}(a, p, t)\, dp - \int_a^{\infty} u'(x)\, q(x)\, dx, \\ \frac{d}{dt} U_{a,\infty} &= u(a)\, q(a) + \int_a^{\infty} u'(x)\, q(x)\, dx, \end{aligned} \tag{9}$$

где под q понимается поток массы, определенный формулой (6). Отсюда получаем выражения для потока кинетической и потенциальной энергий:

$$q_T = \frac{1}{2m_0^2} \int_{-\infty}^{\infty} p^3 n^{\Phi}(x, p, t)\, dp, \quad q_U = u(x)\, q(x).$$

Складывая формулы (9), получаем выражение для скорости изменения полной энергии:

$$\frac{d}{dt} E_{a,\infty} = q_T + q_U = q_E;$$

это изменение порождается только переносом полной энергии частицами через конец $x = a$ интервала $a \leqslant x < \infty$.

Мы не будем рассматривать решение начальной задачи при построении локального параметра (в частности, плотности) среды на фазовой плоскости, так как это построение осуществляется в точности так же, как в §§ III. 2—4, а ограничимся несколькими упражнениями на эту тему.

Упражнения

1. Приведите для среды из частиц аналог утверждения: приращение кинетической энергии равно суммарной работе сил, действующих на систему.

2. Напишите закон эволюции фазовой плотности $n^{\Phi}(x, p, t)$ при заданном ее начальном распределении

$$n^{\Phi}\big|_{t=t_0} = n_0^{\Phi}(x_0, p_0)$$

для однородного поля сил, т. е. для $F=F(t)$.

3. То же — для общего поля $F(x, p, t)$ при $n_0^{\Phi}(x, p)=\delta(x-x_0)\delta(p-p_0)$ (x_0 и p_0 — постоянные). Какой смысл полученного решения?

4. Напишите закон эволюции плотности для случая, когда среда в начальный момент была однородна и покоилась.

5. Найдите стационарное распределение плотности $n^{\Phi}(x, p)$, если $F=-kx-\frac{\lambda}{m_0}p$, $n^{\Phi}(x, 0)\equiv n_0^{\Phi}=\text{const}$ при фиксированном $k>0$ и различных λ.

Указание. Воспользуйтесь параметрическим представлением плотности $n^{\Phi}=n^{\Phi}(x_0, t)$, $x=x(x_0, t)$, $p=p(x_0, t)$.

§ 5. Стационарное распределение частиц в консервативном поле

Для стационарного консервативного (т. е. не зависящего от скоростей и потенциального) поля сил $F(x)$ система уравнений характеристик имеет вид

$$\dot{x}=\frac{p}{m_0}, \quad \dot{p}=F(x)$$

и обладает очевидным первым интегралом

$$\frac{1}{2m_0}p^2+m_0u(x)=E\ (=\text{const}), \quad \text{где} \quad m_0u'(x)=-F(x), \tag{1}$$

выражающим закон сохранения энергии; здесь E — полная энергия частицы.

Мы уже упоминали в конце § 2, что в рассматриваемом случае каждый элемент среды на фазовой плоскости в процессе своей эволюции не меняет плотности. Отсюда непосредственно вытекает, в частности, что любое стационарное распределение фазовой плотности $n^{\Phi}(x, p)$ постоянно вдоль каждой характеристики (почему?), хотя, вообще говоря, различно вдоль разных характеристик.

Постоянство фазовой плотности вдоль характеристики находится в соответствии со следующими элементарными соображениями. Вы-