Мы не будем рассматривать решение начальной задачи при построении локального параметра (в частности, плотности) среды на фазовой плоскости, так как это построение осуществляется в точности так же, как в §§ III. 2—4, а ограничимся несколькими упражнениями на эту тему.

Упражнения

1. Приведите для среды из частиц аналог утверждения: приращение кинетической энергии равно суммарной работе сил, действующих на систему.

2. Напишите закон эволюции фазовой плотности $n^{\Phi}(x, p, t)$ при заданном ее начальном распределении

$$n^{\Phi}\big|_{t=t_0}=n_0^{\Phi}(x_0, p_0)$$

для однородного поля сил, т. е. для $F=F(t)$.

3. То же — для общего поля $F(x, p, t)$ при $n_0^{\Phi}(x, p)=\delta(x-x_0)\delta(p-p_0)$ (x_0 и p_0— постоянные). Какой смысл полученного решения?

4. Напишите закон эволюции плотности для случая, когда среда в начальный момент была однородна и покоилась.

5. Найдите стационарное распределение плотности $n^{\Phi}(x, p)$, если $F=-kx-\frac{\lambda}{m_0}p$, $n^{\Phi}(x, 0)\equiv n_0^{\Phi}=\text{const}$ при фиксированном $k>0$ и различных λ.

Указание. Воспользуйтесь параметрическим представлением плотности $n^{\Phi}=n^{\Phi}(x_0, t)$, $x=x(x_0, t)$, $p=p(x_0, t)$.

§ 5. Стационарное распределение частиц в консервативном поле

Для стационарного консервативного (т. е. не зависящего от скоростей и потенциального) поля сил $F(x)$ система уравнений характеристик имеет вид

$$\dot{x}=\frac{p}{m_0}, \quad \dot{p}=F(x)$$

и обладает очевидным первым интегралом

$$\frac{1}{2m_0}p^2+m_0u(x)=E\ (=\text{const}), \quad \text{где} \quad m_0u'(x)=-F(x), \tag{1}$$

выражающим закон сохранения энергии; здесь E — полная энергия частицы.

Мы уже упоминали в конце § 2, что в рассматриваемом случае каждый элемент среды на фазовой плоскости в процессе своей эволюции не меняет плотности. Отсюда непосредственно вытекает, в частности, что любое стационарное распределение фазовой плотности $n^{\Phi}(x, p)$ постоянно вдоль каждой характеристики (почему?), хотя, вообще говоря, различно вдоль разных характеристик.

Постоянство фазовой плотности вдоль характеристики находится в соответствии со следующими элементарными соображениями. Выделим в среде «струйку» частиц, полная энергия которых заключена между соседними значениями E и $E+dE$ (рис. 74). Тогда плотность элемента этой струйки, заштрихованного на рис. 74, равна

$$\rho = m_0 \frac{n^\Phi dx\, dp}{dx} = m_0 n^\Phi dp. \tag{2}$$

Однако, дифференцируя равенство (1) при зафиксированном x, получаем, что $p\,dp = m_0 dE\,|_{x=\text{const}}$, откуда (2) можно переписать в виде $\rho = m_0 n^\Phi \cdot dE \Big|_x \cdot \frac{1}{\dot{x}}$. Но первые три множителя вдоль струйки постоянны, т. е. мы получаем, что плотность среды с нерассеянной скоростью обратно пропорциональна этой скорости, как и должно быть для стационарных одномерных течений при сохранении масс.

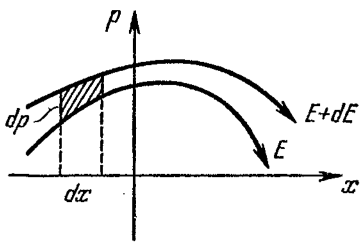

Рис. 74.

Предположим, что частицы среды обладают полной энергией в некоторых пределах $E_1 < E < E_2$ и каждому уровню полной энергии отвечает не более одной траектории движения частицы на фазовой плоскости; так будет, если на интервале $\alpha < x < \beta$, заполненном средой (это может быть и вся ось x), потенциал $u(x)$ не имеет максимумов и по крайней мере одно из значений $u(\alpha)$ и $u(\beta)$ равно E_2 ($u(\alpha)$ ($u(\beta)$) может оказаться меньше E_2, только если $\alpha = -\infty$ (соответственно $\beta = \infty$)). Тогда в силу предыдущего абзаца стационарная фазовая плотность n^Φ будет однозначной функцией энергии E частицы $n^\Phi = n^\Phi(E)$. Если считать этот закон распределения частиц по уровням энергии известным, то нетрудно получить формулу для плотности среды:

$$\rho(x) = m_0 \int n^\Phi dp = 2m_0^2 \int n^\Phi(E) \frac{dE}{|p|} = \sqrt{2}\, m_0^{3/2} \int_{m_0 u(x)}^{E_2} \frac{n^\Phi(E)\, dE}{\sqrt{E - m_0 u(x)}}; \tag{3}$$

здесь коэффициент 2 появился из-за того, что каждому значению $E > m_0 u(x)$ соответствуют два значения $p = \pm\sqrt{2m_0 E - 2m_0^2 u(x)}$, отвечающие двум встречным потокам. Отметим, что интеграл (3) — несобственный, но сходящийся: на нижнем пределе, так как там получается интеграл вида $\int_a^{b>a} \frac{ds}{\sqrt{s-a}}$, а на верхнем, при $E_2 = \infty$, за счет достаточно быстрого затухания плотности $n^\Phi(E)$.