

§ 6. Примеры

Одним из важных примеров распределения фазовой плотности по энергии является уже рассмотренное в § II.14 распределение, для которого все частицы обладают одинаковой энергией E_0 *) и потому в фазовой плоскости занята только одна траектория, отвечающая уровню E_0 , т. е. $n^\Phi(E) = A\delta(E - E_0)$, где A — некоторый коэффициент. Подстановка в (5.3) дает

$$\rho(x) = \sqrt{2}m_0^{3/2} \int \frac{A\delta(E - E_0)}{\sqrt{E - m_0u(x)}} dE = \frac{\sqrt{2} Am_0^{3/2}}{\sqrt{E_0 - m_0u(x)}}.$$

Мы видим, что среда размазана по области таких x , для которых значения потенциала $u(x) < E_0/m_0$, причем в точках, где $u(x) = E_0/m_0$, плотность среды обращается в бесконечность.

В качестве другого примера приведем *Ферми-распределение*, для которого $n^\Phi(E) = Be(E_0 - E)$, где $e(s)$ — единичная функция (см., например, ЭПМ, § VI.3), равная единице для $s > 0$ и нулю для $s < 0$. Вычисление плотности по формуле (5.3) дает:

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \sqrt{2}m_0^{3/2} \int \frac{Be(E_0 - E)}{\sqrt{E - m_0u(x)}} dE = \sqrt{2}m_0^{3/2} B \int_{m_0u(x)}^{E_0} \frac{dE}{\sqrt{E - m_0u(x)}} = \\ &= 2\sqrt{2} Bm_0^{3/2} \sqrt{E_0 - m_0u(x)}. \end{aligned}$$

Таким образом, среда здесь размазана по той же области, что в предыдущем примере, однако в конечных точках этой области плотность ρ обращается в нуль **).

Рассмотрим, наконец, *каноническое распределение по Максвеллу — Больцману*, определяемое формулой $n^\Phi(E) = Ce^{-E/\theta}$, где C и

*) В § II.14 отмечалось, что такая совокупность частиц образует микроканонический ансамбль.

***) Константа B выражается через постоянную Планка h , $B = 2/h$, где $h = 6,5 \cdot 10^{-27} \text{ г} \cdot \text{см}^2/\text{сек}$. (Для знатоков: значение B приведено для частиц со спином $1/2$.) Надо напомнить, однако, что природа, Вселенная характеризуются тремя пространственными координатами. Поэтому все приведенные выше формулы, относящиеся к одномерным задачам, носят характер упражнений. В трехмерном мире фазовую плотность надо относить к шестимерному элементу объема $|dr||dp|$, константа $B = 2/h^3$, а для плотности получается формула

$$\rho(r) = B \frac{4\pi}{3} m_0 [2m_0(E - U(r))]^{3/2}.$$

Уточним, что здесь мы говорим о состоянии системы при абсолютном нуле температуры, когда эта система удовлетворяет условию минимума полной энергии. Опыт показывает, что Ферми-распределению подчиняются, в частности, электроны. Причина этого лежит в глубоком законе природы, согласно которому фазовая плотность среды из электронов не может в стационарном состоянии превышать указанную выше константу B . Но при выполнении этого условия минимальный энергетический уровень системы в целом достигает

Φ — параметры распределения. Для вычисления плотности здесь удобно воспользоваться интегрированием по p , т. е. формулой (3.1):

$$\begin{aligned} \rho(x) &= m_0 \int_{-\infty}^{\infty} n^{\Phi} dp = m_0 \int_{-\infty}^{\infty} C e^{-[(p^2/2m_0) + m_0 u(x)]/\Phi} dp = \\ &= C m_0 e^{-m_0 u(x)/\Phi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2/2m_0\Phi} dp = C m_0 \sqrt{2\pi m_0 \Phi} e^{-m_0 u(x)/\Phi}. \end{aligned}$$

Структура этой формулы, как и в предшествующих примерах, на зависит от конкретного вида потенциала $u(x)$. Однако в рассматриваемом случае, в отличие от двух предыдущих, среда оказывается размазанной по всей оси x .

Особая роль распределения по Максвеллу — Больцману выясняется при рассмотрении процессов, в которых частицы могут испытывать столкновения, связанные с перераспределением их кинетической энергии. Рассмотрение таких процессов выходит за рамки этой книги; отметим только, что любое распределение в среде, частицы которой не испытывают столкновений, после допущения столкновений превращается в нестационарное и начинает эволюционировать — исключение составляет распределение по Максвеллу — Больцману, которое при этом остается стационарным.

Пусть потенциал $u(x)$ имеет следующий простой вид:

$$u(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq l), \\ \infty & (-\infty < x < 0, l < x < \infty). \end{cases} \quad (1)$$

Это означает, что частицы как бы находятся в ящике, осциллируя между стенками $x=0$ и $x=l$ так, что каждая из частиц, обладающая полной энергией E , проходит от одной стенки до другой и обратно с постоянной по абсолютной величине скоростью $\sqrt{\frac{2E}{m_0}}$ с мгновенным изменением направления у стенки. Такой осцилляции отвечает

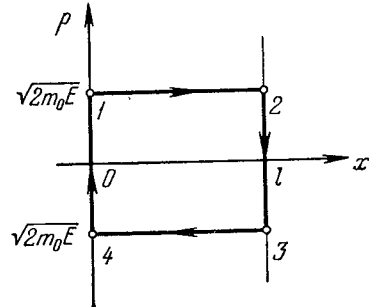


Рис. 75.

ся, только если на части фазовой плоскости (или фазового пространства, если идет речь о пространственных движениях) фазовая плотность равна B , а на остальной части плотность равна нулю, там среды нет. Другими словами, энергетические причины заставляют среду концентрироваться до максимально возможной фазовой плотности, что и приводит к распределению по Ферми. Это происходит аналогично тому, как в водоеме тяжелая жидкость в равновесии заполняет весь водоем до некоторого уровня, выше которого жидкости нет, что энергетически наиболее выгодно.

циклическое движение по фазовому прямоугольнику 1234 (рис. 75) с мгновенным перескоком из 2 в 3 и из 4 в 1.

Допустим теперь, что внутри описанного «ящика» фазовая плотность распределена по закону Ферми. Тогда параметры E_0 и B этого распределения связаны с массой M и полной энергией \mathcal{E} осциллирующей среды формулами

$$M = l \cdot 2 \sqrt{2m_0 E_0} \cdot B \cdot m_0 = l B E_0^{1/2} (2m_0)^{3/2}, \quad (2)$$

$$\mathcal{E} = l \cdot 2 \int_0^{\sqrt{2m_0 E_0}} \frac{p^2}{2m_0} B dp = \frac{2}{3} l B E_0^{3/2} (2m_0)^{1/2}. \quad (3)$$

Пусть правая стенка переместилась, т. е. l получило приращение dl . Тогда можно принять (мы не приводим здесь доказательство этого), что если это перемещение осуществляется достаточно медленно, то и после него фазовая плотность будет распределена по Ферми, но с другими параметрами распределения $E_0 + dE_0$ и $B + dB$. Однако при такой деформации масса среды сохраняется, т. е. $dM = 0$; кроме того, в конце п. 3 было показано, что даже если силовой потенциал зависит от времени, фазовая плотность движущегося элемента среды не меняется. Отсюда и $dB = 0$. Опираясь на эти сведения, вычислим $d\mathcal{E}$. Для этого продифференцируем равенство (2), что даст

$$dl \cdot E_0^{1/2} + l \cdot \frac{1}{2} E_0^{-1/2} dE_0 = 0, \quad \text{т. е.} \quad dE_0 = -\frac{2E_0}{l} dl.$$

Отсюда в силу равенства (3)

$$d\mathcal{E} = \frac{2}{3} B (2m_0)^{1/2} \left(dl \cdot E_0^{3/2} + l \cdot \frac{3}{2} E_0^{1/2} dE_0 \right) = -\frac{4}{3} B (2m_0)^{1/2} E_0^{3/2} dl.$$

Итак, при увеличении l полная внутренняя энергия \mathcal{E} системы (которая в рассматриваемом примере равна кинетической) уменьшилась, т. е. система произвела работу. Отношение этой работы к элементарному пути, пройденному стенкой, т. е.

$$-\frac{d\mathcal{E}}{dl} = \frac{4}{3} B (2m_0)^{1/2} E_0^{3/2}, \quad (4)$$

есть давление среды на стенку «ящика».

Полученный результат можно проверить по формуле (5.5):

$$q_p(x, t) = \frac{1}{m_0} \cdot 2 \int_0^{\sqrt{2m_0 E_0}} B p^2 dp = \frac{2B}{3m_0} (V \sqrt{2m_0 E_0})^3,$$

что совпадает с (4). Мы предоставляем читателю с помощью формул (2) и (3) показать, что правая часть (4) равна $2\mathcal{E}/l$.

Аналогичное рассмотрение распределения по Максвеллу—Больцману в «ящике» отнесено к упражнениям.

Рассмотрим теперь другой вид потенциала

$$u(x) = \begin{cases} gx & (0 \leq x < \infty), \\ \infty & (-\infty < x < 0), \end{cases}$$

отвечающий однородному силовому полю напряженности $-g$, расположенному по одну сторону от непроницаемой стенки $x=0$. Можно представить себе, что мы рассматриваем ящик с дном, но без крышки, причем на частицы, находящиеся внутри этого ящика, действует сила тяжести. Частица с полной энергией E в фазовой плоскости совершает циклические движения по линии вида 1231 (рис. 76), состоящей из дуги параболы с уравнением

$$\frac{p^2}{2m_0} + m_0gx = E, \quad \text{т. е.} \quad x = \frac{E}{gm_0} - \frac{p^2}{2gm_0^2}$$

и мгновенно проскакиваемого отрезка 31 оси p .

Если принять, кроме того, что фазовая плотность стационарна и распределена по закону Максвелла — Больцмана

$$n^\Phi(x, p) = Ce^{-E/\Phi} = Ce^{-m_0gx/\Phi} e^{-p^2/2m_0\Phi},$$

то рассматриваемая схема описывает распределение частиц в *изотермической атмосфере* (температура которой не зависит от высоты x).

Найдем некоторые характеристики такой атмосферы. Так, плотность на высоте x равна (см. (3.1))

$$\rho(x) = m_0 \int_{-\infty}^{\infty} Ce^{-m_0gx/\Phi} e^{-p^2/2m_0\Phi} dp = 2\sqrt{\pi\Phi} Cm_0^{3/2} e^{-m_0gx/\Phi}; \quad (5)$$

эта формула называется *барометрической формулой*. Если условно принять за высоту атмосферы значение $x=H$, для которого $\int_0^{\infty} \rho dx = \rho(0) \cdot H$, то получаем

$$H = \frac{1}{\rho(0)} \int_0^{\infty} \rho dx, \quad \text{т. е.} \quad H = \frac{\Phi}{m_0g}.$$

Давление q_p на высоте x равно силе, действующей на столб $x < s < \infty$, т. е. на основании (5)

$$q_p(x) = g \int_x^{\infty} \rho(s) ds = 2\Phi \sqrt{\pi\Phi} Cm_0^{1/2} e^{-m_0gx/\Phi} = \frac{\Phi}{m_0} \rho(x); \quad (6)$$

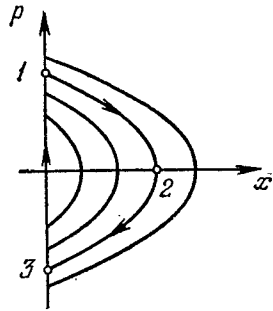


Рис. 76.

давление получается пропорциональным плотности. (Мы предоставляем читателю получить тот же результат с помощью формулы (4.5).)

Вычислим еще среднюю кинетическую энергию частиц на высоте x : на основании формул (4.5) и (6) получаем

$$\bar{T} = \frac{dT}{dn} = \frac{\rho_T dx}{dn} = \frac{q p dx}{2dn} = \frac{\vartheta p}{2m_0 dn/dx} = \frac{\vartheta}{2}.$$

Итак, эта энергия не зависит от высоты, а определяется только параметром ϑ в распределении Максвелла — Больцмана. Этот важнейший параметр называется *температурой* рассматриваемой системы. Он имеет размерность энергии и потому может измеряться в любых единицах энергии. Однако на практике обычно оказывается более удобным измерять температуру в специальных единицах — градусах (Кельвина). Коэффициент перевода градусов в систему CGS называется *постоянной Больцмана*, он равен $1,37 \cdot 10^{-16}$ эрг/град.

Из формулы (6) мы видим, что давление пропорционально не только плотности, но и температуре среды.

Отметим, что частицы в реальной атмосфере отнюдь не являются не взаимодействующими; напротив, средний пробег частиц между столкновениями имеет порядок всего 10^{-5} см. Однако оказывается, что это взаимодействие не нарушает закона распределения Максвелла — Больцмана и, тем самым, справедливости выведенных здесь формул. Мы вернемся к этому вопросу в § V.22.

Упражнения

1. Для линейного осциллятора, т. е. при $u(x) = \frac{k}{2} x^2$, установите связь параметров C , ϑ канонического распределения по Максвеллу — Больцману с массой M и полной энергией \mathcal{E} осциллирующей среды.
2. Выведите аналоги формул (2) — (4) для потенциала (1) и распределения Максвелла — Больцмана.

§ 7. Среда с нерассеянной скоростью

Допустим, что в начальный момент времени t_0 частицы распределены вдоль оси x с плотностью $\rho_0(x)$ и все частицы с координатой x_0 имеют при $t=t_0$ один и тот же импульс $\chi_0(x_0)$; другими словами, в каждой точке оси x рассеивание скорости отсутствует. (Например, при $t=t_0$ все частицы могли покоиться, это означало бы, что $\chi_0(x_0) \equiv 0$.) Тогда начальная фазовая плотность

$$n_0^\Phi(x_0, p_0) = \frac{1}{m_0} \rho_0(x_0) \delta(p_0 - \chi_0(x_0)).$$

На фазовой плоскости x, p при $t=t_0$ носителем потока частиц будет служить линия с уравнением $p = \chi_0(x)$.

С течением времени частицы перемещаются, и потому линия — носитель семейства изображающих точек среды — меняет свое поло-