давление получается пропорциональным плотности. (Мы предоставляем читателю получить тот же результат с помощью формулы (4.5).)

Вычислим еще среднюю кинетическую энергию частиц на высоте x: на основании формул (4.5) и (6) получаем

$$\overline{T}=\frac{dT}{dn}=\frac{\rho_T dx}{dn}=\frac{qp dx}{2dn}=\frac{\vartheta\rho}{2m_0 dn/dx}=\frac{\vartheta}{2}.$$

Итак, эта энергия не зависит от высоты, а определяется только параметром ϑ в распределении Максвелла — Больцмана. Этот важнейший параметр называется *температурой* рассматриваемой системы. Он имеет размерность энергии и потому может измеряться в любых единицах энергии. Однако на практике обычно оказывается более удобным измерять температуру в специальных единицах — градусах (Кельвина). Коэффициент перевода градусов в систему CGS называется *постоянной Больцмана*, он равен $1{,}37\cdot 10^{-16}$ *эрг/град*.

Из формулы (6) мы видим, что давление пропорционально не только плотности, но и температуре среды.

Отметим, что частицы в реальной атмосфере отнюдь не являются невзаимодействующими; напротив, средний пробег частиц между столкновениями имеет порядок всего 10^{-5} *см*. Однако оказывается, что это взаимодействие не нарушает закона распределения Максвелла — Больцмана и, тем самым, справедливости выведенных здесь формул. Мы вернемся к этому вопросу в § V.22.

Упражнения

1. Для линейного осциллятора, т. е. при $u(x)=\frac{k}{2}x^2$, установите связь параметров C, ϑ канонического распределения по Максвеллу — Больцману с массой M и полной энергией $\mathcal{E}$ осциллирующей среды.

2. Выведите аналоги формул (2) — (4) для потенциала (1) и распределения Максвелла — Больцмана.

§ 7. Среда с нерассеянной скоростью

Допустим, что в начальный момент времени t_0 частицы распределены вдоль оси x с плотностью $\rho_0(x)$ и все частицы с координатой x_0 имеют при $t=t_0$ один и тот же импульс $\chi_0(x_0)$; другими словами, в каждой точке оси x рассеивание скорости отсутствует. (Например, при $t=t_0$ все частицы могли покоиться, это означало бы, что $\chi_0(x_0)\equiv\equiv 0$.) Тогда начальная фазовая плотность

$$n_0^{\Phi}(x_0,\ p_0)=\frac{1}{m_0}\rho_0(x_0)\,\delta(p_0-\chi_0(x_0)).$$

На фазовой плоскости x, p при $t=t_0$ носителем потока частиц будет служить линия с уравнением $p=\chi_0(x)$.

С течением времени частицы перемещаются, и потому линия — носитель семейства изображающих точек среды — меняет свое положение на фазовой плоскости (рис. 77). Если обозначить через

$$x=\varphi(t;\ x_0,\ p_0,\ t_0),\quad p=\psi(t;\ x_0,\ p_0,\ t_0) \qquad (1)$$

решение системы уравнений (3.5), удовлетворяющее начальным условиям (3.7), то получаем, что частица, имеющая в начальный момент t_0 координату $x=\xi$, обладает скоростью, меняющейся по вполне определенному однозначному закону $v=\frac{1}{m_0}\psi(t;\ \xi,\ \chi_0(\xi),\ t_0)$. Таким образом, мы приходим к ситуации, рассмотренной в гл. II, с возможным явлением перехлеста (§ II.10). В частности, на рис. 25 показана возможная эволюция носителя семейства изображающих точек среды в простейшем случае, когда $F\equiv 0$. (Какой вид имеет на рис. 25 поле фазовых скоростей?)

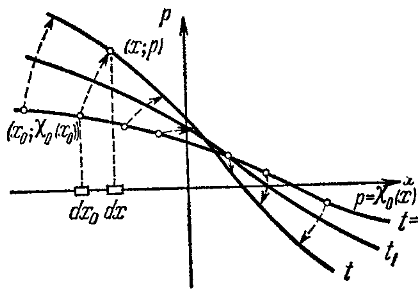

Рис. 77. $t_0 < t_1 < t$

В § II.10 мы показали, что при возникновении перехлеста в точках «заворота» среды ее плотность обращается в бесконечность. Подчеркнем, что эта возможность необходимо связана с нерассеянностью скорости. Если скорость рассеяна, так что фазовая плотность n^Φ является всюду конечной, и к тому же скорость всех частиц ограничена, то и «обычная» плотность среды не может обратиться в бесконечность. Это видно из формулы (3.1), так как в рассматриваемом случае интеграл фактически распространен по конечному интервалу скоростей; более точно, если для всех частиц $|p|<a$, то $\max\limits_x \rho \leqslant 2am_0 \max\limits_{x,\,p} n^\Phi$ (почему?). Для рассеянной скорости явление перехлеста не проявляется.

В частности, если всем точкам линии $p=\chi_0(x)$ отвечает одинаковый уровень полной энергии E, то частицы на фазовой плоскости будут перемещаться по этой линии, которая будет, таким образом, оставаться неподвижным носителем изображающих точек среды во все моменты времени. Мы вновь приходим к ситуации, рассмотренной в § II.14, в которой явления перехлеста не будет. Однако при этом, как и при перехлесте, на оси x возникают точки с бесконечной плотностью; в обоих случаях это связано с обращением фазовой плотности в бесконечность.

Упражнения

1. Для среды с нерассеянной скоростью вычислите $\frac{d\rho}{dt}$.

2. Пусть $F=-m_0\omega^2 x$, $\rho_0(x)\equiv\rho_0=\text{const}$, $\chi_0(x_0)=x_0^2$, $t_0=0$. Найдите $\rho(x,\ t)$, $t_{\text{кр}}$ и уравнение каустики в плоскости $x,\ t$.