§ 8. Особые решения. Автомодельность

Если частица в начальный момент t_0 имела координату x_0 и импульс p_0, то, пользуясь обозначениями § 7, получим, что в момент t она будет изображаться точкой фазовой плоскости с координатами (7.1); стало быть, соответствующая фазовая плотность равна

$$n^\Phi = G(x, p, t; x_0, p_0, t_0) = \delta(x - \varphi(t; x_0, p_0, t_0))\, \delta(p - \psi(t; x_0, p_0, t_0)).$$

С помощью этой функции легко выразить решение

$$n^\Phi(x, p, t) = \int_{-\infty}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} dx_0 \int_{-\infty}^{\infty} G(x, p, t; x_0, p_0, \tau)\, r(x_0, p_0, \tau)\, dp_0 \quad (1)$$

задачи о распространении потока частиц, непрерывно возникающих с фазово-временной плотностью $r(x_0, p_0, \tau)$ (это значит, что за время от τ до $\tau + d\tau$ на участке оси от x_0 до $x_0 + dx_0$ в интервале импульсов от p_0 до $p_0 + dp_0$ возникает $r(x_0, p_0, \tau)\, dx_0\, dp_0\, d\tau$ частиц).

Рассмотрим в качестве примера простую задачу о распространении потока частиц, непрерывно возникающих в одной точке. Пусть силы на частицы не действуют, т. е. $F \equiv 0$, и, начиная с момента $t = 0$, в точке $x_0 = 0$ возникают частицы с интенсивностью ν штук в единицу времени, равномерно распределенные по импульсу на интервале $0 \leqslant p_0 \leqslant h$. Решение такой задачи совершенно наглядно. Именно, к любому моменту $t > 0$ возникает νt частиц. Поэтому в указанном диапазоне импульсов на интервал от p до $p + dp$ придется $\frac{\nu t}{h} dp$ частиц. Эта порция будет равномерно распределена по интервалу $0 \leqslant x \leqslant \frac{pt}{m_0}$, т. е. с фазовой плотностью

$$\frac{\nu t}{h} dp : \frac{pt}{m_0} dp = \frac{m_0 \nu}{hp}.$$

Таким образом, получается фазовая плотность

$$n^\Phi(x, p, t) = \begin{cases} \dfrac{m_0 \nu}{hp} & \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{pt}{m_0},\ 0 \leqslant p \leqslant h\right), \\ 0 & (\text{при прочих комбинациях } x,\ p) \end{cases} \quad (2)$$

(рис. 78). Массовая плотность на оси x получается равной

$$\rho(x, t) = \begin{cases} m_0 \displaystyle\int_{m_0 x/t}^{h} \frac{m_0 \nu}{hp} dp = \frac{m_0^2 \nu}{h} \ln \frac{ht}{m_0 x} & \left(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{ht}{m_0}\right), \\ 0 & \left(\dfrac{ht}{m_0} < x < \infty\right). \end{cases}$$

Как видим, при $x = 0$ плотность ρ равна бесконечности, что вызвано непрерывным возникновением как угодно медленных частиц (этим же объясняется то, что при любом фиксированном x плотность

$\rho(x, t)\to\infty$ при $t\to\infty$). На подвижном конце интервала, заполненного частицами, т. е. при $x=\frac{ht}{m_0}$, плотность ρ равна нулю, так как там находятся только самые быстрые частицы, вышедшие в начальный момент времени. Интеграл $\int\limits_0^{ht/m_0}\rho\,dx$ при каждом t хоть и несобственный, но сходящийся, он равен общей массе частиц, возникших к моменту t, т. е. $\nu m_0 t$ (проверьте этот результат с помощью формального вычисления интеграла!).

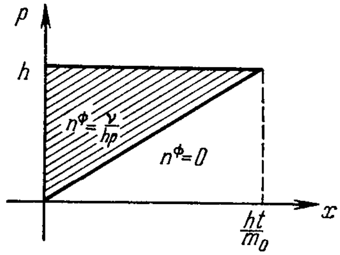

Рис. 78.

Для практики действий с δ-функцией получим этот же результат как следствие общей формулы (1). Здесь $\varphi(t;\ x_0,\ p_0,\ t_0)=$ $=x_0+\frac{p_0}{m_0}(t-t_0)$, $\psi(t;\ x_0,\ p_0,\ t_0)=p_0$, так что

$$G(x,\ p,\ t;\ x_0,\ p_0,\ t_0)=\delta\left(x-x_0-\frac{p_0}{m_0}(t-t_0)\right)\delta(p-p_0).$$

Кроме того,

$$r(x_0,\ p_0,\ \tau)=\begin{cases}\frac{\nu}{h}\delta(x_0) & (0\leqslant p_0\leqslant h,\ 0\leqslant\tau<\infty),\\ 0 & (\text{для прочих комбинаций } p_0,\ \tau).\end{cases}$$

Поэтому формула (1) дает при $t>0$

$$n^\Phi(x,\ p,\ t)=$$
$$=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^h dp_0\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta\left(x-x_0-\frac{p_0}{m_0}(t-\tau)\right)\delta(p-p_0)\,\frac{\nu}{h}\,\delta(x_0)\,dx_0. \quad (3)$$

Для преобразования правой части нам понадобится общая формула

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\delta(x-a)\,\delta(a-b)\,da=\delta(x-b). \quad (4)$$

Для ее доказательства обозначим интеграл, стоящий в левой части, через $J(x)$, и заметим, что при каждом $x\neq b$ подынтегральная функция равна нулю при всех a, т. е. и интеграл $J(x)=0$. Отсюда видно, что зависимость $J(x)$ похожа на дельта-функцию $\delta(x-b)$. Чтобы проверить это, воспользуемся определяющим соотношением для дельта-функции (§ I.5) и вычислим интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}J(x)f(x)\,dx$$

при любой непрерывной функции $f(x)$. Совершая простые преобразования, получим (проверьте!):

$$\int_{-\infty}^{\infty} J(x) f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,\delta(a-b)\,f(x)\,da =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} da\left(\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,f(x)\,dx\right)\delta(a-b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\,\delta(a-b)\,da = f(b)$$

(при этом мы дважды пользовались упомянутым определяющим соотношением). Так как определяющему соотношению удовлетворяет т о л ь к о дельта-функция, мы получаем, что $J(x)=\delta(x-b)$, т. е. приходим к формуле (4).

Применяя формулу (4) к решению (3), получим

$$n^{\Phi}(x,\ p,\ t) = \frac{\nu}{h}\int_0^h \delta(p-p_0)\,dp_0 \int_0^t \delta\left(x-\frac{p_0}{m_0}\,t+\frac{p_0}{m_0}\,\tau\right)d\tau.$$

Так как выражение $x-\frac{p_0}{m_0}\,t+\frac{p_0}{m_0}\,\tau$ во внутреннем интеграле пробегает интервал от $x-\frac{p_0}{m_0}\,t$ до x, то внутренний интеграл отличен от нуля $\left(\text{и равен } \frac{m_0}{p_0}\right)$ только при $0<x<\frac{p_0}{m_0}\,t$, т. е.

$$n^{\Phi}(x,\ p,\ t) = \begin{cases} \dfrac{\nu}{h}\displaystyle\int_0^h \delta(p-p_0)\,\frac{m_0}{p_0}\,e\left(p_0-\frac{m_0 x}{t}\right)dp_0 & (x>0), \\ 0 & (x<0). \end{cases}$$

При $\frac{m_0 x}{t}<p<h$ последний интеграл равен $\frac{m_0}{p}$, а при прочих комбинациях $x,\ p,\ t$ — равен нулю. Мы приходим к выражению (2) для решения, полученному выше из элементарных соображений, с точностью до несущественной замены нестрогих неравенств на строгие.

Полученное решение обладает замечательным свойством *автомодельности*, другими словами, при изменении времени оно преобразуется по правилу подобия. В общем случае функция $f(x,\ y,\ t)$ координат $x,\ y$ и времени t называется автомодельной, если она имеет вид

$$f(x,\ y,\ t) = t^{\alpha}\varphi(t^{\beta}x,\ t^{\gamma}y), \tag{5}$$

где $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ — некоторые постоянные, а φ — функция двух переменных; тогда при изменении t изменение функции сводится к перемене масштабов по осям аргументов и функции. (В принципе вместо степеней t можно было бы поставить любые функции от t; однако практическое значение имеют только степени.) Аналогично дается определение автомодельности функции любого числа координат и времени.

Проверим, например, автомодельность функции

$$f(x,\ t)=x+a\sqrt{t}\,x^3\quad (a=\mathrm{const}).$$

Для этого представим ее в виде $f(x,\ t)=t^{\alpha}(t^{-\alpha}x+at^{-\alpha+1/2}x^3)$, где показатель α мы подберем так, чтобы $t^{-\alpha+1/2}x^3=(t^{-\alpha}x)^3$. Отсюда $\alpha=-\frac{1}{4}$, т. е.

$$f(x,\ t)=t^{-1/4}(t^{1/4}x+at^{3/4}x^3)=t^{-1/4}\varphi(t^{1/4}x),$$

где $\varphi(s)=s+as^3$.

Автомодельный характер решения (2), построенного выше, становится более ясным, если на минуту ввести функцию

$$\Psi(x,\ y)=\begin{cases} 1/y & (0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1),\\ 0 & (\text{при прочих комбинациях } x,\ y).\end{cases}$$

Тогда решение (2) можно переписать в виде

$$n^{\Phi}(x,\ p,\ t)=\frac{m_0\nu}{h^2}\Psi\left(\frac{m_0x}{pt},\ \frac{p}{h}\right).$$

Сравнивая с (5), мы видим, что $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\gamma=0$.

Предположение об автомодельности решения (такие решения называются также *особыми*) позволяет понизить число независимых переменных в дифференциальном уравнении на единицу и тем самым иногда построить решение даже в случае сложных нелинейных задач. Такие решения, несмотря на свой специальный вид, часто имеют узловое физическое значение (например, описывают развитие особенности, как это будет для формулы (5) при $\beta<0$, $\gamma<0$); кроме того, с их помощью можно иногда сделать полезные выводы о характере других, неавтомодельных решений. К сожалению, мы не имеем здесь возможности остановиться подробнее на этом важном вопросе, поэтому ограничимся указанием на книгу Л. И. Седова, Методы подобия и размерности в механике, «Наука», изд. 6, 1967, где рассмотрены теория и приложения автомодельных решений, а также на статью Г. И. Баренблатта и Я. Б. Зельдовича «Промежуточные асимптотики в математической физике» в журнале «Успехи математических наук», т. XXVI, № 2 (1971), 115—129.

Упражнение

Найдите автомодельные решения уравнения $x\vartheta'_x-t\vartheta'_t=\vartheta$.

§ 9. Движение частиц в пространстве

Остановимся коротко на пространственных движениях среды (плоские движения рассматриваются аналогично), причем будем обозначать координаты частиц буквами x_1, x_2, x_3. Если известны силы, действующие на идентичные невзаимодействующие частицы,