Проверим, например, автомодельность функции

$$f(x,\ t)=x+a\sqrt{t}\,x^3 \quad (a=\text{const}).$$

Для этого представим ее в виде $f(x,\ t)=t^{\alpha}(t^{-\alpha}x+at^{-\alpha+1/2}x^3)$, где показатель α мы подберем так, чтобы $t^{-\alpha+1/2}x^3=(t^{-\alpha}x)^3$. Отсюда $\alpha=-\frac{1}{4}$, т. е.

$$f(x,\ t)=t^{-1/4}(t^{1/4}x+at^{3/4}x^3)=t^{-1/4}\varphi(t^{1/4}x),$$

где $\varphi(s)=s+as^3$.

Автомодельный характер решения (2), построенного выше, становится более ясным, если на минуту ввести функцию

$$\Psi(x,\ y)=\begin{cases} 1/y & (0\leqslant x\leqslant y\leqslant 1),\\ 0 & (\text{при прочих комбинациях } x,\ y).\end{cases}$$

Тогда решение (2) можно переписать в виде

$$n^{\Phi}(x,\ p,\ t)=\frac{m_0\nu}{h^2}\Psi\left(\frac{m_0x}{pt},\ \frac{p}{h}\right).$$

Сравнивая с (5), мы видим, что $\alpha=0$, $\beta=-1$, $\gamma=0$.

Предположение об автомодельности решения (такие решения называются также *особыми*) позволяет понизить число независимых переменных в дифференциальном уравнении на единицу и тем самым иногда построить решение даже в случае сложных нелинейных задач. Такие решения, несмотря на свой специальный вид, часто имеют узловое физическое значение (например, описывают развитие особенности, как это будет для формулы (5) при $\beta<0$, $\gamma<0$); кроме того, с их помощью можно иногда сделать полезные выводы о характере других, неавтомодельных решений. К сожалению, мы не имеем здесь возможности остановиться подробнее на этом важном вопросе, поэтому ограничимся указанием на книгу Л. И. Седова, Методы подобия и размерности в механике, «Наука», изд. 6, 1967, где рассмотрены теория и приложения автомодельных решений, а также на статью Г. И. Баренблатта и Я. Б. Зельдовича «Промежуточные асимптотики в математической физике» в журнале «Успехи математических наук», т. XXVI, № 2 (1971), 115—129.

Упражнение

Найдите автомодельные решения уравнения $x\vartheta'_x-t\vartheta'_t=\vartheta$.

§ 9. Движение частиц в пространстве

Остановимся коротко на пространственных движениях среды (плоские движения рассматриваются аналогично), причем будем обозначать координаты частиц буквами x_1, x_2, x_3. Если известны силы, действующие на идентичные невзаимодействующие частицы, в зависимости от их координат, скоростей и времени, то уравнения движения каждой частицы приобретают вид, аналогичный (3.5):

$$\dot{x}_i = \frac{p_i}{m_0}, \quad \dot{p}_i = F_i\left(x_1, x_2, x_3, \frac{p_1}{m_0}, \frac{p_2}{m_0}, \frac{p_3}{m_0}, t\right) \quad (i = 1, 2, 3). \qquad (1)$$

Мы получаем поле скоростей в 6-мерном фазовом пространстве состояний частицы (состояние частицы характеризуется ее положением и скоростью). Подчеркнем, что из-за рассеянной скорости задание начальной точки в пространстве координат *не определяет* однозначно траектории частицы. Для этого требуется задать также и начальные скорости частицы, другими словами, задать начальную точку в *фазовом* пространстве.

Важным частным случаем является тот, когда силы, действующие на частицы, не зависят от их скоростей, т. е. образуют поле в трехмерном пространстве. В отличие от одномерной картины, такое поле далеко не всегда будет потенциальным; условия потенциальности силового поля рассмотрены, в частности, в ЭПМ, §§ X.3, XI.7 и XI.11. Приведем, например, такое условие: для потенциальности силового поля необходимо и достаточно, чтобы работа, производимая полем при произвольном перемещении частицы, зависела только от начального и конечного ее положений, но не зависела от пути, соединяющего эти положения.

Наиболее прост случай, когда потенциал линеен по пространственным координатам: тогда его градиент не зависит от этих координат, т. е. силовое поле однородно, сила может зависеть лишь от времени.

Непотенциальными являются любое вихревое поле, безвихревое поле в многосвязной области с отличными от нуля циркуляциями, любое поле, для которого силы, действующие на частицу, зависят от ее скорости (силы трения, силы Лоренца, действующие на заряженную частицу в магнитном поле, и т. д.).

Движение трехмерной среды характеризуется фазовой плотностью $n^\Phi(x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, t)$, удовлетворяющей (при сохранении числа частиц в каждой порции частиц) уравнению неразрывности

$$\frac{\partial n^\Phi}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3}\left[\frac{p_i}{m_0}\frac{\partial n^\Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial p_i}(F_i n^\Phi)\right] = 0. \qquad (2)$$

Пользуясь векторными обозначениями, это уравнение можно переписать так:

$$\frac{\partial n^\Phi}{\partial t} + \frac{1}{m_0}\boldsymbol{p}\cdot\operatorname{grad}_x n^\Phi + \operatorname{div}_p(n^\Phi \boldsymbol{F}) = 0,$$

где индекс при знаке векторной операции указывает на ту совокупность переменных, по которой берется эта операция. Второй член в последнем уравнении можно переписать также в виде $\operatorname{div}_x \frac{n^\Phi}{m_0}\boldsymbol{p}$, откуда видно, что уравнение неразрывности в фазовом пространстве имеет дивергентную форму (§§ II.9 и III. 5). С помощью производной вдоль траектории уравнение (2) можно еще записать в следующем виде:

$$\frac{dn^{\Phi}}{dt} + (\operatorname{div}_p \boldsymbol{F})\, n^{\Phi} = 0. \tag{3}$$

Наряду с переменными Эйлера x_i, p_i, t можно пользоваться переменными Лагранжа

$$x_{i0} = x_i\,|_{t=t_0},\quad p_{i0} = p_i\,|_{t=t_0}\quad (i = 1,\ 2,\ 3),\ t.$$

Уравнение неразрывности в переменных Лагранжа имеет вид

$$\frac{d}{dt}\left(n^{\Phi}\frac{D(x_1,\ x_2,\ x_3,\ p_1,\ p_2,\ p_3)}{D(x_{10},\ x_{20},\ x_{30},\ p_{10},\ p_{20},\ p_{30})}\right) = 0, \tag{4}$$

оно полностью равносильно уравнению (3).

Из уравнения неразрывности, как и для одномерного случая, нетрудно вывести закон сохранения массы, выражаемой по той же формуле (4.1), в которой под x и dx (и аналогично под p и dp) надо понимать x_1, x_2, x_3 и $dx_1dx_2dx_3$ соответственно. При отсутствии сил инвариантен вектор импульса (количества движения)

$$\boldsymbol{P} = \int\int n^{\Phi}(x,\ p,\ t)\,\boldsymbol{p}\,dx\,dp;$$

если же имеются силы $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x,\ p,\ t)$, то, подобно одномерному случаю,

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \int\int \boldsymbol{F} n^{\Phi}\,dx\,dp,$$

а если силы не зависят от скоростей, $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(x,\ t)$, то

$$\frac{d\boldsymbol{P}}{dt} = \int \rho\,\boldsymbol{F}\,dx.$$

При потенциальных автономных силах, т. е. для $\boldsymbol{F} = -m_0\operatorname{grad}_x u(x_1,\ x_2,\ x_3)$ инвариантна полная энергия системы

$$E = \frac{1}{2m_0}\int\int(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{p})\,n^{\Phi}(x,\ p,\ t)\,dx\,dp + m_0\int\int u(x)\,n^{\Phi}(x,\ p,\ t)\,dx\,dp. \tag{5}$$

Для пространственных систем возможен новый, по сравнению с одномерным случаем, инвариант — вектор момента количества движения

$$\boldsymbol{G} = \int\int n^{\Phi}(x,\ p,\ t)\,\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}\,dx\,dp. \tag{6}$$

Для инвариантности этого вектора достаточно, чтобы все силы были направлены радиально, т. е. чтобы

$$\boldsymbol{F}(x, \dot{x}, t) = F(x, \dot{x}, t)\,\boldsymbol{x}^0$$

$$(\boldsymbol{x}^0 = \boldsymbol{x}/|\boldsymbol{x}|, \ \boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}).$$

Это вытекает из аналогичного утверждения для каждой частицы (см., например, ЭПМ, § XI.2); формальное доказательство на основе уравнения неразрывности мы предоставляем читателю (см. упражнение 1). Обращаем внимание читателя на то, что как в определении (6) момента количества движения, так и в условии его инвариантности существенную роль играет выбор точки, принятой за начало координат; другими словами, момент берется относительно некоторой выделенной, отмеченной точки.

Решение задачи с начальным условием при построении локального параметра среды в фазовом 6-мерном пространстве проводится по методам гл. III; в частности, формула для эволюции фазовой плотности сразу вытекает из уравнения неразрывности в форме (3) или (4).

Представляет интерес рассмотрение, подобное § 7, среды с нерассеянной скоростью, для которой в начальный момент в каждой точке x все частицы имеют определенный импульс $p_0(x)$ (при нашей системе обозначений записи $p_0 = (p_{01}, p_{02}, p_{03})$ и $\boldsymbol{p}_0$ равносильны); так будет, например, если в начальный момент среда покоилась. Интегрирование уравнений движения (1) дает возможность перейти к ситуации, рассмотренной в § III.6, с возможным образованием складок среды и обращением плотности среды на границе этих складок в бесконечность.

Если скорость рассеяна, так что в начальный момент фазовая плотность всюду конечна, то и в дальнейшем она остается конечной, так что складки, описанные в § III.6, появиться не могут. Если к тому же скорость всех частиц ограничена, то массовая плотность среды в пространстве x не может обратиться в бесконечность.

Остановимся еще на стационарном распределении фазовой плотности в случае автономного потенциального силового поля. Здесь имеется принципиальное отличие от одномерного случая.

Именно, для одномерного случая задание полной энергии E частицы определяло ее траекторию на фазовой плоскости (иногда дискретное множество траекторий); а так как фазовая плотность на такой траектории постоянна, то можно было говорить о фазовой плотности как о функции энергии $n^\Phi = n^\Phi(E)$. Другими словами, закон сохранения энергии определяет единственный возможный первый интеграл дифференциального уравнения фазовых траекторий (общее понятие первого интеграла см., например, в ЭПМ, § VIII.2).

В отличие от этого, в трехмерном случае закон сохранения полной энергии

$$\frac{1}{2m_0}|\boldsymbol{p}|^2+m_0u(x)\equiv\frac{1}{2m_0}(p_1^2+p_2^2+p_3^2)+m_0u(x_1,\ x_2,\ x_3)=E, \qquad (7)$$

как любое конечное уравнение, связывающее шесть переменных, определяет при заданном E некоторое 5-мерное многообразие (Ω_E) в 6-мерном фазовом пространстве x, p. Другими словами, вся 1-мерная фазовая траектория частицы целиком расположена на 5-многообразии (Ω_E), отвечающем уровню полной энергии этой частицы, но, конечно, эта траектория не исчерпывает (Ω_E)! Все (Ω_E) целиком заполнено $5-1=4$-параметрическим семейством фазовых траекторий, отвечающих одинаковому уровню полной энергии. Вообще, многообразия, целиком составленные из траекторий заданной автономной системы дифференциальных уравнений, называются *инвариантными многообразиями* для этой системы. Поток, определяемый такой системой, скользит вдоль любого инвариантного многообразия, так что если частица начинает свое движение на нем, то она в дальнейшем на нем останется. Таким образом, (Ω_E) представляет собой инвариантное 5-многообразие для системы уравнений движения частиц в фазовом 6-мерном пространстве.

Оказывается, что в некоторых случаях из постоянства фазовой плотности на траектории вытекает постоянство этой плотности на всем многообразии (Ω_E), содержащем эту траекторию; об этих случаях, в которых можно рассматривать фазовую плотность как функцию энергии, мы поговорим в § 11. Однако так будет не всегда. В частности, если уравнения движения в фазовом 6-мерном пространстве обладают первым интегралом, независимым от (7), т. е. имеется добавочный закон сохранения, то фазовая плотность может зависеть не только от энергии, но и от другой сохраняющейся величины. Другими словами, тогда инвариантное 5-многообразие (Ω_E) «расслаивается» на инвариантные 4-многообразия, отвечающие различным значениям добавочного инварианта. Знание нескольких независимых первых интегралов приводит к соответствующему числу величин, от которых может зависеть фазовая плотность.

Рассмотрим, например, сферически-симметричное потенциальное силовое поле, т. е. поле, для которого $u=u(|\boldsymbol{x}|)$. Мы уже упоминали, что для такого поля частицы, помимо полной энергии E, сохраняют вектор момента количества движения $\boldsymbol{L}$, т. е. здесь имеется три добавочных первых интеграла. Поэтому и стационарно распределенная фазовая плотность зависит, вообще говоря, от четырех величин — от полной энергии и трех проекций момента количества движения в какой-либо системе декартовых координат.

Так, важную роль играет следующее обобщение канонического распределения по Максвеллу — Больцману (см. § 6):

$$n^{\Phi}(x,\ p)=Ce^{-E/\vartheta+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{L}} \qquad (\boldsymbol{L}=\boldsymbol{x}\times\boldsymbol{p}), \qquad (8)$$

где заданный вектор $\boldsymbol{a}$, наряду со скалярами C и ϑ, служит параметром распределения. Хотя частицы вращаются вокруг начала координат во всевозможных плоскостях, но при $\boldsymbol{a} \neq 0$ угловая скорость, направленная по $\boldsymbol{a}$, имеет преимущество, т. е. получается описание совокупности частиц, обладающей некоторым общим моментом количества движения, направленным по вектору $\boldsymbol{a}$. Такое распределение получается асимптотически с течением времени, если частицы находятся в ящике, вращающемся вокруг вектора $\boldsymbol{a}$ с угловой скоростью $a\vartheta$. В равновесии газ в этом ящике за счет столкновений со стенками приобретает в каждой точке ту же среднюю угловую скорость.

Каждому конкретному потенциалу $u(|\boldsymbol{x}|)$ отвечает 5-параметрическое семейство фазовых плотностей вида (8). Существенная трудность возникает при рассмотрении ньютонова потенциала $u = -k/|\boldsymbol{x}|$; тогда при подсчете суммарных характеристик (например, суммарной массы) возникает интеграл вида $\int e^{k/\vartheta|\boldsymbol{x}|}\,dx$ с крайне сильной особенностью у подынтегральной функции, т. е. расходящийся. Произвести нормировку за счет подбора параметров не удается, и чтобы спасти положение, приходится уточнять закон распределения Максвелла — Больцмана, на чем мы здесь не останавливаемся.

Упражнения

1. Докажите инвариантность момента количества движения при радиальном направлении сил.

2. Укажите, для каких действующих сил кинетическая энергия системы (первое слагаемое в правой части (5)) инвариантна во времени.

3. Пусть начало координат, начиная с момента $t=0$, испускает частицы с постоянной интенсивностью во всех направлениях, причем силы на частицы не действуют. Напишите соответствующую формулу для фазовой плотности.

§ 10. Теорема Лиувилля

Вернемся к одномерному движению частиц в поле сил, не зависящих от скорости этих частиц; как мы видели, это движение на фазовой плоскости описывается системой уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m_0}, \qquad \frac{dp}{dx} = F(x, t). \tag{1}$$

В конце § 3 мы показали, что если в процессе эволюции среды масса каждой ее порции сохраняется, так что выполняется уравнение неразрывности, то и фазовая плотность каждого элемента среды на фазовой плоскости в процессе его эволюции остается неизменной. Это важное утверждение называется *теоремой Лиувилля*. Подчеркнем, что в ее условиях весьма существенно, чтобы силы не зависели от скорости: например, из уравнения (3.9) легко следует, что при на-