где заданный вектор $\boldsymbol{a}$, наряду со скалярами C и ϑ, служит параметром распределения. Хотя частицы вращаются вокруг начала координат во всевозможных плоскостях, но при $\boldsymbol{a}\neq 0$ угловая скорость, направленная по $\boldsymbol{a}$, имеет преимущество, т. е. получается описание совокупности частиц, обладающей некоторым общим моментом количества движения, направленным по вектору $\boldsymbol{a}$. Такое распределение получается асимптотически с течением времени, если частицы находятся в ящике, вращающемся вокруг вектора $\boldsymbol{a}$ с угловой скоростью $a\vartheta$. В равновесии газ в этом ящике за счет столкновений со стенками приобретает в каждой точке ту же среднюю угловую скорость.

Каждому конкретному потенциалу $u(|\boldsymbol{x}|)$ отвечает 5-параметрическое семейство фазовых плотностей вида (8). Существенная трудность возникает при рассмотрении ньютонова потенциала $u=-k/|\boldsymbol{x}|$; тогда при подсчете суммарных характеристик (например, суммарной массы) возникает интеграл вида $\int e^{k/\vartheta|x|}\,dx$ с крайне сильной особенностью у подынтегральной функции, т. е. расходящийся. Произвести нормировку за счет подбора параметров не удается, и чтобы спасти положение, приходится уточнять закон распределения Максвелла — Больцмана, на чем мы здесь не останавливаемся.

Упражнения

1. Докажите инвариантность момента количества движения при радиальном направлении сил.

2. Укажите, для каких действующих сил кинетическая энергия системы (первое слагаемое в правой части (5)) инвариантна во времени.

3. Пусть начало координат, начиная с момента $t=0$, испускает частицы с постоянной интенсивностью во всех направлениях, причем силы на частицы не действуют. Напишите соответствующую формулу для фазовой плотности.

§ 10. Теорема Лиувилля

Вернемся к одномерному движению частиц в поле сил, не зависящих от скорости этих частиц; как мы видели, это движение на фазовой плоскости описывается системой уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\frac{p}{m_0},\qquad \frac{dp}{dx}=F(x,\ t). \tag{1}$$

В конце § 3 мы показали, что если в процессе эволюции среды масса каждой ее порции сохраняется, так что выполняется уравнение неразрывности, то и фазовая плотность каждого элемента среды на фазовой плоскости в процессе его эволюции остается неизменной. Это важное утверждение называется *теоремой Лиувилля*. Подчеркнем, что в ее условиях весьма существенно, чтобы силы не зависели от скорости: например, из уравнения (3.9) легко следует, что при наличии сил трения, для которых $\frac{\partial F}{\partial p}<0$, фазовая плотность любого элемента среды в процессе его эволюции возрастает. В то же время стационарность силового поля в данном вопросе не важна: теорема Лиувилля связана не с сохранением энергии, а с существованием гамильтониана, даже если он зависит от времени.

Теорема Лиувилля имеет часто кинематическую трактовку. Именно, из общей формулы (III.3.6) для якобиана $\frac{D(x,\ p)}{D(x_0,\ p_0)}$, примененной к системе (1), вытекает, что в рассматриваемом случае

$$\frac{D(x,\ p)}{D(x_0,\ p_0)}=1. \tag{2}$$

В силу геометрического смысла якобиана (§ I.4) это означает, что каждый элемент среды фазовой плоскости, а потому и любая конечная порция этой среды на фазовой плоскости в процессе эволюции не меняет своей площади. Итак, эволюция среды на фазовой плоскости, описывающая изменение состояний рассматриваемой системы во времени, оставляет «фазовые площади» (имеющие размерность $[m][l]^2[t]^{-1}$!) «растекающихся» областей инвариантными. Ясно, что эта формулировка полностью равносильна приведенной в предыдущем абзаце: если массы сохраняются, то инвариантность площади равносильна инвариантности плотности.

Еще одно доказательство инвариантности площади «растекающихся» областей для системы (1) получится, если записать поле скоростей на фазовой плоскости в виде

$$\boldsymbol{v}=\frac{dx}{dt}\,\boldsymbol{e}_x+\frac{dp}{dt}\,\boldsymbol{e}_p=\frac{p}{m_0}\,\boldsymbol{e}_x+F(x,\ t)\,\boldsymbol{e}_p,$$

откуда

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\frac{\partial(p/m_0)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,\ t)}{\partial p}=0,$$

так как p/m_0 не зависит от x, а $F(x,\ t)$ — от p. Однако в силу § I.8 это условие как раз и означает неизменность площадей «растекающихся» областей плоскости $x,\ p$.

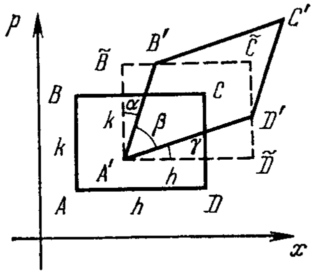

Рис. 79.

Из-за важности теоремы Лиувилля дадим также непосредственное доказательство инвариантности растекающихся площадей. Рассмотрим на плоскости $x,\ p$ малый прямоугольник $ABCD$ со сторонами длины h и k, параллельными осям координат (рис. 79). Через время Δt того же порядка, что h и k, он перейдет в криволинейную фигуру, площадь которой, с точностью до величин выше третьего порядка малости, можно подсчитать как площадь параллелограмма $A'B'C'D'$; здесь

$$\overrightarrow{AA'} = \partial_t (x\boldsymbol{e}_x + p\boldsymbol{e}_p) = (\dot{x}\boldsymbol{e}_x + \dot{p}\boldsymbol{e}_p)\,dt = \left(\frac{p}{m_0}\boldsymbol{e}_x + F(x,\ t)\,\boldsymbol{e}_p\right)dt,$$

$$\overrightarrow{BB'} = \left(\frac{p+k}{m_0}\boldsymbol{e}_x + F(x,\ t)\,\boldsymbol{e}_p\right)dt,$$

аналогично выражаются $\overrightarrow{CC'}$ и $\overrightarrow{DD'}$. Мы видим, что проекции векторов $\overrightarrow{AA'}$ и $\overrightarrow{BB'}$ на ось p одинаковы (тут используется независимость F от p!), т. е. если прямоугольник $ABCD$ поступательно перенести в положение $A'\tilde{B}\tilde{C}\tilde{D}$ (рис. 79), то точка B' попадает на прямую $\tilde{B}\tilde{C}$. Аналогично проверяем, что точка D' попадет на прямую $\tilde{C}\tilde{D}$. Отсюда площадь прямоугольника $A'B'C'D'$ равна

$$A'D'\cdot A'B'\sin\beta = \sqrt{h^2+\tilde{D}D'^2}\sqrt{k^2+\tilde{B}B'^2}\cos(\alpha+\gamma) =$$
$$= h\left(1+\frac{1}{2}\frac{\tilde{D}D'^2}{h^2}+\ldots\right)k\left(1+\frac{1}{2}\frac{\tilde{B}B'^2}{h^2}+\ldots\right)\left[1-\frac{(\alpha+\gamma)^2}{2}+\ldots\right]$$

(здесь мы воспользовались разложением в ряд Тейлора). Однако последнее произведение, с точностью до членов выше третьего порядка малости, равно hk. Значит, приращение площади параллелограмма имеет порядок выше $hk\,\Delta t$. Но тогда приращение площади любой конечной фигуры за время Δt имеет порядок выше Δt (почему?), т. е. скорость этого приращения равна нулю, а потому площадь остается постоянной.

Мы уже отметили в § 5, что утверждение о постоянстве фазовой плотности находится в хорошем соответствии и с элементарными соображениями.

Было упомянуто также, что теорема Лиувилля справедлива и для случая плоских или пространственных движений частиц. В самом деле, если сила $\boldsymbol{F}$ не зависит от скорости $\dot{\boldsymbol{x}}$, то из уравнения (9.3) вытекает равенство $\frac{dn^{\Phi}}{dt}=0$, т. е. постоянство фазовой плотности каждой мало рассеянной по координате и скорости порции среды. Эту теорему можно записать в виде формулы (2), в которой x означает x_1, x_2 в плоском случае и x_1, x_2, x_3— в пространственном и т. д. Отсюда, как и выше, вытекает инвариантность фазового объема «растекающихся» областей фазового пространства. (Речь идет, конечно, о 4-мерном объеме для плоских движений и 6-мерном объеме для пространственных.)

Теорема Лиувилля, в случаях ее применимости, влечет за собой важные следствия о возможном характере эволюции среды. Так, рассмотрим основные, указанные в § 1 возможные типы особых точек на фазовой плоскости в автономном случае. Нетрудно видеть, что из теоремы Лиувилля вытекает невозможность особых точек типа фокуса и узла (рис. 70 и 71). В самом деле, для таких точек в устойчивом случае любая конечная «растекающаяся» область, расположенная вблизи точки покоя, с течением времени попадает в как угодно малую окрестность этой точки, т. е. площадь такой области стремится к нулю и потому не может быть инвариантной. В неустойчивом случае (для его иллюстрации надо на траекториях рис. 70 и 71 поменять направления стрелок на противоположные) аналогичное противоречие получается при $t \to -\infty$. Таким образом, в условиях применимости теоремы Лиувилля из основных типов особых точек на плоскости возможны только центр (в устойчивом случае, рис. 69) и седло (в неустойчивом, рис. 72). Из подобных соображений исключаются предельные циклы на плоскости (рис. 62), так как любая «растекающаяся» область, расположенная вблизи предельного цикла, должна при $t \to \infty$ или $t \to -\infty$ попасть в как угодно узкое кольцо, содержащее этот цикл, т. е. площадь такой области стремится при этом к нулю.

Аналогичные выводы вытекают из теоремы Лиувилля для возможного расположения траекторий в фазовом пространстве более высокой размерности.

Из теоремы Лиувилля можно получить также утверждения, относящиеся к поведению среды в физическом пространстве (пространстве положений частиц). Так, пусть рассматривается движение среды, при котором скорости частиц при всех t остаются ограниченными, скажем, по модулю не превосходят некоторой постоянной A. Кроме того, пусть дано, что в начальный момент времени фазовая плотность также была ограниченной: $\rho^{\Phi}|_{t=t_0} \leqslant \rho_0^{\Phi}$. Тогда, если эта плотность остается постоянной (теорема Лиувилля), то из формулы (3.1) вытекает, что и «истинная» плотность среды при всех t остается ограниченной: например, в одномерном случае $\rho \leqslant 2A\rho_0^{\Phi}$ (почему?). Таким образом, если скорости частиц остаются ограниченными, то плотность не только не может обратиться в бесконечность, как для среды с нерассеянной скоростью (§ 7), но не может даже неограниченно нарастать при $t \to \infty$, как для системы с трением.

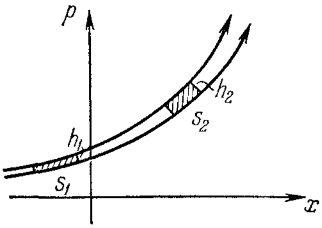

Рис. 80.

Отметим для дальнейшего, что не следует думать, будто в условиях применимости теоремы Лиувилля не только площади фигур, но и длины дуг на фазовой плоскости *) остаются инвариантными. На рис. 80 показано положение элементарной «растекающейся»

*) Говорить о длине дуги можно только после того, как уравнены размерности осей координат. Для этого можно, например, выбрать некоторые длину и импульс за характерные и отнести все длины и импульсы к этим характерным, после чего считать величины x и p безразмерными.

области между близкими фазовыми траекториями в два момента времени. Так как площадь инвариантна, т. е. $s_1h_1=s_2h_2$, то длина элемента дуги фазовой траектории меняется обратно пропорционально расстоянию между соседними траекториями, $s_2 : s_1=h_1 : h_2$.

§ 11. Эргодичность

Вернемся к задаче о колебаниях среды (об этой задаче уже говорилось в § II.14). Рассмотрим одномерную среду, осциллирующую в потенциальной яме с потенциалом ускорений $u(x)$. Уравнение движения частиц

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-u'(x)$$

имеет промежуточный интеграл

$$\frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+u(x)=\frac{E}{m_0} \tag{1}$$

(E — полная энергия частицы). В уравнении (1) легко разделяются переменные, что дает возможность вычислить период T колебаний частицы:

$$\frac{dx}{dt}=\pm\sqrt{2\left[\frac{E}{m_0}-u(x)\right]}, \quad \text{откуда} \quad T=\sqrt{2m_0}\int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}}\frac{dx}{\sqrt{E-m_0u(x)}}.$$

Здесь $x_{\min}$ и $x_{\max}$ определяются из уравнения $u(x)=E/m_0$, а добавочный множитель $2\left(\sqrt{2}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ появился из-за того, что интервал от $x_{\min}$ до $x_{\max}$ проходится частицей за период (цикл) дважды — вперед и назад.

Мы видим, что период колебаний, вообще говоря, зависит от уровня энергии E частицы или, что равносильно, от амплитуды колебаний. Важным исключением является самый простой — линейный осциллятор, для которого $F(x)=-kx$ $(k=\text{const}>0)$, откуда $u(x)=\frac{k}{2m_0}x^2$ и

$$x_{\min}=-\sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad x_{\max}=\sqrt{\frac{2E}{k}},$$

$$T=\sqrt{2m_0}\int\limits_{-\sqrt{2E/k}}^{\sqrt{2E/k}}\frac{dx}{\sqrt{E-kx^2/2}}=2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}}$$

(проверьте!).

Напомним теперь результаты, полученные в § II.14. Пусть рассматривается произвольное (вообще говоря, нестационарное!) распределение частиц с одинаковой энергией E; в частности, это может