

области между близкими фазовыми траекториями в два момента времени. Так как площадь инвариантна, т. е.  $s_1 h_1 = s_2 h_2$ , то длина элемента дуги фазовой траектории меняется обратно пропорционально расстоянию между соседними траекториями,  $s_2 : s_1 = h_1 : h_2$ .

### § 11. Эргодичность

Вернемся к задаче о колебаниях среды (об этой задаче уже говорилось в § II.14). Рассмотрим одномерную среду, осциллирующую в потенциальной яме с потенциалом ускорений  $u(x)$ . Уравнение движения частиц

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -u'(x)$$

имеет промежуточный интеграл

$$\frac{1}{2} \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + u(x) = \frac{E}{m_0} \quad (1)$$

( $E$  — полная энергия частицы). В уравнении (1) легко разделяются переменные, что дает возможность вычислить период  $T$  колебаний частицы:

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{2 \left[ \frac{E}{m_0} - u(x) \right]}, \quad \text{откуда} \quad T = \sqrt{2m_0} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{dx}{\sqrt{E - m_0 u(x)}}.$$

Здесь  $x_{\min}$  и  $x_{\max}$  определяются из уравнения  $u(x) = E/m_0$ , а добавочный множитель  $2 \left( \sqrt{2} = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$  появился из-за того, что интервал от  $x_{\min}$  до  $x_{\max}$  проходится частицей за период (цикл) дважды — вперед и назад.

Мы видим, что период колебаний, вообще говоря, зависит от уровня энергии  $E$  частицы или, что равносильно, от амплитуды колебаний. Важным исключением является самый простой — линейный осциллятор, для которого  $F(x) = -kx$  ( $k = \text{const} > 0$ ), откуда  $u(x) = \frac{k}{2m_0} x^2$  и

$$x_{\min} = -\sqrt{\frac{2E}{k}}, \quad x_{\max} = \sqrt{\frac{2E}{k}},$$

$$T = \sqrt{2m_0} \int_{-\sqrt{2E/k}}^{\sqrt{2E/k}} \frac{dx}{\sqrt{E - kx^2/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0}{k}}$$

(проверьте!).

Напомним теперь результаты, полученные в § II.14. Пусть рассматривается произвольное (вообще говоря, нестационарное!) распределение частиц с одинаковой энергией  $E$ ; в частности, это может

быть одна единственная осциллирующая частица. Тогда если осреднить это распределение по времени, то осредненное распределение с возрастанием интервала осреднения будет приближаться к стационарному распределению, которое не зависит от начальных условий, а однозначно определяется потенциалом  $u(x)$ , энергией  $E$  и общей осциллирующей массой  $M$ . (От последней стационарное распределение зависит линейно.) Такое асимптотическое выравнивание в среднем любого распределения равносильно равенству  $\overline{F(x(t))} = \overline{F(m)}$  средних по времени и по всему стационарному ансамблю частиц для любой функции  $F(x)$  от положения частицы и носит название эргодичности. Это свойство для одномерных движений с единым уровнем энергии частиц в определенном смысле является тривиальным, оно легко проверяется и всегда имеет место.

Пусть теперь рассматриваемый ансамбль частиц имеет некоторый разброс  $\Delta E$  по энергии (см. рис. 81, где этот разброс утрирован). Как ведет себя тогда асимптотически само неосредненное нестационарное распределение частиц? Исключим пока случай линейного осциллятора и рассмотрим какой-либо участок  $A_0 B_0 C_0 D_0$  фазовой плоскости, заштрихованный на рис. 81. Пусть прошел промежуток времени, для которого средняя линия  $MN$  этого участка совершила полный оборот и вернулась в исходное положение. Тогда из-за зависимости периода обращения частиц от уровня их энергии один из краев участка, например,  $B_0 C_0$ , не дойдет до исходного положения, тогда как противоположный край  $A_0 D_0$  перейдет через него, в результате чего участок примет вид  $A_1 B_1 C_1 D_1$  (рис. 81). При дальнейших оборотах эти отставание и опережение будут усугубляться: через несколько оборотов участок примет вид  $A_k B_k C_k D_k$  (рис. 81), а еще позже — вид куска спирали, число витков которой будет с ростом  $t$  безгранично возрастать.

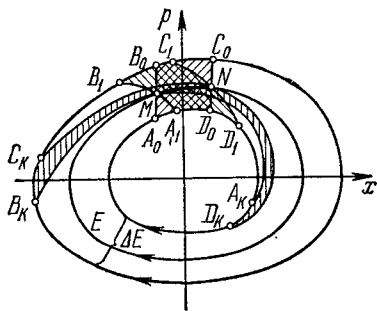


Рис. 81.

Допустим теперь, что начальное распределение плотности среды на фазовой плоскости таково: плотность в каждой точке участка  $A_0 B_0 C_0 D_0$  на рис. 81 равна 1, тогда как плотность во всех остальных точках равна нулю, т. е. среды там нет; другими словами, рассматривается эволюция сгустка частиц, первоначально мало рассеянного по координате и по скорости. Тогда, так как фазовая плотность любого участка среды в процессе его эволюции остается неизменной (теорема Лиувилля), то средняя плотность любой части  $(H)$  плоскости в любой момент  $t$  равна относительной доле в  $(H)$  площади заштрихованного участка, попавшего в процессе эволюции в  $(H)$  в

этот момент. В силу сказанного в предыдущем абзаце представляется правдоподобным, что эта доля при  $t \rightarrow \infty$  выравнивается, приближаясь к некоторому предельному значению, зависящему только от  $(H)$ ; и действительно, это можно доказать строго, на чем мы здесь не будем останавливаться.

Но это означает, что при  $t \rightarrow \infty$  распределение массы на фазовой плоскости стремится к некоторому стационарному, т. е. такому, которое было рассмотрено в § 5. Мы показали это для специального распределения начальной фазовой плотности. Однако так как любое распределение начальной фазовой плотности можно с любой точностью заменить на кусочно-постоянное, то получаем, что любое нестационарное распределение масс в рассматриваемых предположениях при  $t \rightarrow \infty$  стремится к стационарному.

Итак, среда из частиц, осциллирующих по нелинейному закону и не испытывающих внешних возмущений, асимптотически стремится к стационарному распределению масс. Интересно, что при этом фазовая плотность среды стремится к своему предельному значению только после осреднения. (Это ясно уже из того, что при рассмотренном выше специальном распределении начальной фазовой плотности эта плотность в любой момент времени принимает только значения 0 и 1, тогда как в пределе она принимает и все промежуточные значения.) Более точно это означает следующее: если обозначить через  $n^\Phi(x, p, t)$  фазовую плотность среды в момент  $t$ , а через  $n_\infty^\Phi(x, p)$  — фазовую плотность предельного распределения, то

$$n_\infty^\Phi(x, p) = \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ k \rightarrow 0}} \left[ \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{4hk} \int_{x-h}^{x+h} du \int_{p-k}^{p+k} n^\Phi(u, v, t) dv \right].$$

Другими словами, задавшись достаточно малыми длинами интервалов осреднения, мы по прошествии достаточно большого времени (зависящего от этих длин!) получим, что осредненная плотность будет как угодно близка к предельной.

Здесь картина совершенно аналогична той, которая возникает, когда мы рассматриваем последовательность функций  $f(x) + \sin mx$  при  $m \rightarrow \infty$ . Последовательность осредненных функций

$$\overline{\sin mx^h} = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} \sin mu \, du = \frac{1}{hm} \sin mh \sin mx$$

при любом фиксированном интервале осреднения  $h > 0$  стремится к нулю при  $m \rightarrow \infty$ . Значит, исходная последовательность функций после осреднения стремится к  $f(x)$ :

$$f(x) = \lim_{h \rightarrow \infty} \left[ \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{f(x) + \sin mx^h} \right].$$

Строго линейный (гармонический) осциллятор составляет исключение. При любом начальном распределении фазовой плотности в нем будут происходить периодические колебания, не стремящиеся асимптотически к пределу; об этом мы уже говорили в § 11.14.

Различие между линейным и нелинейным (говорят также — гармоническим и ангармоническим) осцилляторами отчетливо проявляется также на поведении массовой плотности среды на оси  $x$ . В силу формулы (3.1) для вычисления этой плотности надо интегрировать фазовую плотность по фиксированной прямой, параллельной оси  $p$  в фазовой плоскости. Для нелинейного осциллятора из-за указанного в связи с рис. 81 «закручивания» исходного распределения плотности естественно ожидать (и это ожидание оправдывается!), что рассматриваемый интеграл при  $t \rightarrow \infty$  стремится к определенному пределу, т. е. массовая плотность для каждого  $x$  стремится при  $t \rightarrow \infty$  к некоторому пределу  $\rho(x)$ . (Это массовая плотность стационарного распределения среды, к которому стремится исходное распределение после его осреднения.) В отличие от этого, массовая плотность для гармонического осциллятора при каждом  $x$  будет периодически меняться во времени и потому не будет иметь предела.

Полезно представить себе, как происходит непрерывный переход нелинейного осциллятора с малой нелинейностью в линейный: например, потенциал может равняться  $-\frac{k}{2}x^2 - \alpha x^4$ , где  $k$  фиксировано, а  $\alpha$  берется все ближе и ближе к нулю. Чем меньше нелинейность, тем меньше деформируется элемент фазовой плоскости за каждый свой оборот по фазовым траекториям; в терминах рис. 81 — тем меньше отличается участок  $A_1B_1C_1D_1$  фазовой плоскости от участка  $A_0B_0C_0D_0$ . Таким образом, чем меньше нелинейность, тем больше требуется времени для того, чтобы нестационарное распределение среды приблизилось к осредненному, стационарному; и когда мы переходим к линейному закону колебаний, это время обращается в бесконечность, приближения к стационарному распределению не будет. Эта ситуация напоминает поведение функции  $h_\alpha(t) = e^{-\alpha t} \sin \omega t$  при  $t \rightarrow \infty$ , если  $\omega$  фиксировано, а  $\alpha > 0$  берется все меньше и меньше. Эта функция при каждом фиксированном  $\alpha$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , однако с уменьшением  $\alpha$  — все медленнее и медленнее; в вырожденном состоянии, при  $\alpha = 0$ , мы получаем периодическую функцию  $h_0(t) = \sin \omega t$ , не имеющую предела при  $t \rightarrow \infty$ . На любом фиксированном конечном интервале  $0 \leq t \leq T$  функция  $h_\alpha(t)$  с достаточно малым  $\alpha$  близка к  $h_0(t)$ ; но если рассмотреть сразу всю полуось  $0 \leq t < \infty$ , то такой близости не будет, функция  $h_0(t)$  на полуоси обладает по сравнению с любой  $h_\alpha(t)$  ( $\alpha > 0$ ) качественно новым свойством.

Из сказанного ясно, что при рассмотрении систем с малой нелинейностью важную роль играет время приближения нестационарного распределения среды к стационарному. Если это время окажется

большим времени наблюдения системы, то указанное приближение не успеет проявиться.

Отметим, что вырожденный характер линейных колебаний теряется, если частицы испытывают случайные столкновения друг с другом и с окружающими телами. Перераспределение энергии и фазы колебаний при таких столкновениях приводит к тому, что система постепенно переходит в стационарное состояние, хотя время такого перехода может оказаться достаточно большим. При этом даже если первоначально частицы имели одинаковую энергию, в стационарном состоянии энергия оказывается размазанной (а фаза осредненной).

Перейдем теперь к пространственному движению частиц в стационарном потенциальном силовом поле. Мы уже упоминали в § 9, что фазовые траектории частиц с заданной полной энергией  $E$  заполняют некоторое не меняющееся во времени 5-мерное многообразие  $(\Omega_E)$  в 6-мерном пространстве  $x, p$ . Мы предположим, впредь для простоты, что это многообразие замкнутое; так будет, в частности, для потенциальной ямы, которая служит проекцией многообразия  $(\Omega_E)$  в пространство  $x$ . Рассматриваемый поток, заданный в фазовом 6-мерном пространстве, по теореме Лиувилля оставляет 6-мерный объем инвариантным.

Для дальнейшего нам понадобится 5-мерный объем областей на  $(\Omega_E)$ . Но чтобы имело смысл говорить об этом объеме, нужно, как в сноске на стр. 209, уравнивать размерности фазовых координат. Для этого введем характерную длину  $l_{\text{хар}}$  и характерный импульс  $p_{\text{хар}}$ , а с их помощью — безразмерные координаты и импульсы по формулам

$$x_{i6} = x_i / l_{\text{хар}}, \quad p_{i6} = p_i / p_{\text{хар}}.$$

Теперь можно во всех формулах перейти от  $x_i, p_i$  к  $x_{i6}, p_{i6}$ , после чего опустить индекс «6» и подразумевать, таким образом, под  $x_i$  и  $p_i$  безразмерные координаты и импульс; так мы и будем делать до конца этого параграфа. Например, закон (9.7) сохранения полной энергии, который одновременно является уравнением многообразия  $(\Omega_E)$  в 6-мерном пространстве  $x, p$ , примет вид

$$\frac{p_{\text{хар}}^2}{2m_0} |\mathbf{p}|^2 + m_0 u(l_{\text{хар}} \mathbf{x}) = E \quad (\text{проверьте!}). \quad (2)$$

Из теоремы Лиувилля, конечно, не следует, что поток, рассматриваемый в пространстве  $x, p$  и преобразующий  $(\Omega_E)$  в себя, оставляет инвариантным и 5-мерный объем на  $(\Omega_E)$  (сравните аналогичное рассуждение в конце § 10). Однако можно ввести в каждой точке  $A$  на  $(\Omega_E)$  поправочный коэффициент  $s(A)$ , пропорциональный кратчайшему расстоянию от  $A$  до соседнего многообразия  $(\Omega_{E+dE})$ . Для вычисления этого коэффициента заметим, что 6-мерный градиент функции  $E(x, p)$ , определенной формулой (2), равен

$$\text{grad}_{x,p} E = \frac{p_{\text{хар}}^2}{2m_0} \text{grad}_p |\mathbf{p}|^2 + m_0 \text{grad}_x u(l_{\text{хар}} \mathbf{x}) = \frac{p_{\text{хар}}^2}{m_0} \mathbf{p} - l_{\text{хар}} \mathbf{F}(l_{\text{хар}} \mathbf{x}).$$

Однако градиент по модулю обратно пропорционален расстоянию между поверхностями уровня; это было показано в ЭПМ, §X.2, для функций двух и трех переменных, но это свойство немедленно распространяется на функции любого числа переменных. Поэтому можно положить

$$s(x, p) = |\text{grad}_{x, p} E|^{-1} = \left( \frac{p_{\text{хар}}^4}{m_0^2} |p|^2 + l_{\text{хар}}^2 |F(l_{\text{хар}} x)|^2 \right)^{-1/2}. \quad (3)$$

Теперь можно определить меру  $\mu$  на  $(\Omega_E)$  с помощью ее элемента  $d\mu = s d\Omega$ . Эта мера, хоть была введена с помощью соседнего с  $(\Omega_E)$  многообразия  $(\Omega_{E+\Delta E})$ , в силу формулы (3) опирается только на значения потенциала  $u$  (точнее, модуля его градиента) в точках  $(\Omega_E)$ , т. е. она полностью определяется самим многообразием  $(\Omega_E)$ . Мера  $\mu$  уже будет инвариантной для потока, индуцированного на  $(\Omega_E)$ , что вытекает опять-таки из теоремы Лиувилля. (Почему? Подумайте аналогичное свойство в условиях рис. 69.)

Рассмотрим теперь некоторое стационарное распределение фазовой плотности  $n^\Phi(x, p)$ . В силу теоремы Лиувилля эта плотность постоянна вдоль любой траектории. Следует ли отсюда, что  $n^\Phi$  постоянна на всем многообразии  $(\Omega_E)$ ? Для одномерного случая, когда все  $(\Omega_E)$  состояло из одной единственной траектории, такой вопрос не возникал; однако теперь положение усложняется. Если ответ на поставленный вопрос — положительный, то поток называется *эргодичным*. Для таких потоков стационарная фазовая плотность  $n^\Phi$  зависит только от энергетического уровня  $E$ ,  $n^\Phi = n^\Phi(E)$  (почему?); в частности, подобно §6 можно говорить о микроканоническом и каноническом распределениях.

Причиной эргодичности, когда она имеет место, является то, что произвольная траектория при своем неограниченном продолжении не концентрируется в какой-то части  $(\Omega_E)$ , а блуждает по всему  $(\Omega_E)$ , располагаясь на нем *всюду плотно*. Другими словами, хоть такая траектория не может проходить через каждую точку  $(\Omega_E)$  (так как траектория 1-мерна, а  $(\Omega_E)$  — 5-мерно), но проходит в любой близости от любой точки  $(\Omega_E)$ . А тогда  $n^\Phi$ , принимая постоянное значение вдоль траектории, по непрерывности принимает то же значение во всех точках  $(\Omega_E)$ . (Более подробное исследование показывает, что непрерывность в свойстве эргодичности несущественна.)

Свойство эргодичности примерно равносильно свойству *перемешивания*, которое означает следующее. Пусть в начальный момент времени в  $(\Omega_E)$  выделена некоторая область  $(G)$ , причем  $\frac{\mu(G)}{\mu(\Omega_E)} = \alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ); условно будем называть точки  $(G)$  черными, а остальные точки многообразия  $(\Omega_E)$  — белыми. Тогда поток, определенный в фазовом пространстве, разносит черные точки по всему  $(\Omega_E)$ , в результате чего область  $(G)$  с течением времени все более расплывается, выделяя отростки, которые перепутываются, проникая повсюду в

( $\Omega_E$ ); более точно, для любой неподвижной области ( $H$ ) отношение меры зачерненной части ( $H$ ) к мере всей ( $H$ ) при  $t \rightarrow \infty$  стремится к  $\alpha$ . Другими словами, по истечении достаточного интервала времени черная область расплывается настолько, что в каждой части ( $\Omega_E$ ) доля черных точек будет примерно одинакова.

Уже из свойства всюду плотности траекторий вытекает, что расплывающаяся черная область ( $G$ ) в пределе при  $t \rightarrow \infty$  покроем в  $\Omega_E$  многообразии ( $\Omega_E$ ) серым цветом. Свойство перемешивания означает, что этот цвет будет во всех точках ( $\Omega_E$ ) иметь одинаковую «густоту». Доказательство этого свойства опирается на наличие на ( $\Omega_E$ ) инвариантной меры, в свою очередь, вытекающее из теоремы Лиувилля.

О свойстве перемешивания мы, по существу, говорили в связи с рис. 81, и приведенные там рассуждения хорошо иллюстрируют это свойство. Отличим рассматриваемого сейчас случая является то, что мы пользуемся фиксированным уровнем энергии  $E$ , без какого-либо разброса.

Широко применяется также следующее, равносильное определение свойства эргодичности: для любой неподвижной области ( $H$ ) и любой траектории ( $l$ ) среднее время пребывания ( $l$ ) в ( $H$ ) за промежутки времени  $0 \leq t \leq T$  при  $T \rightarrow \infty$  стремится к  $\mu(H)/\mu(\Omega_E)$ . (Боле подробное исследование показывает, что это свойство может нарушаться на совокупности траекторий, заполняющих множество нулевой меры, т. е. множество, размерность которого ниже, чем размерность ( $\Omega_E$ ), равная 5.) Отсюда вытекает важное следствие. Пусть на ( $\Omega_E$ ) задана какая-либо функция  $\Phi(A)$ , где  $A$  — любая точка ( $\Omega_E$ ). Обозначим через  $A_t$  точку, в которую за время  $t$  поток переносит частицу из некоторой фиксированной точки  $A_0$ ; тогда при изменении  $t$  точка  $A_t$  опишет одну из траекторий. Среднее значение функции  $\Phi$  вдоль этой траектории за промежуток  $\alpha \leq t \leq \beta$  равно

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(A_t) dt.$$

С другой стороны, пользуясь эргодичностью, это среднее можно вычислить иным способом. Разобьем ( $\Omega_E$ ) на большое число малых непересекающихся областей ( $H_k$ ) и обозначим через  $(\tau_k)$  ту часть временного интервала  $\alpha \leq t \leq \beta$ , на протяжении которой точка  $A_t$  проходит по ( $H_k$ ). Тогда

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(A_t) dt = \frac{1}{\beta - \alpha} \sum_k \int_{(\tau_k)} \Phi(A_t) dt. \quad (4)$$

Однако если область ( $H_k$ ) — малая, то в каждом из полученных интегралов подинтегральная функция почти постоянна (почему?), а потому, с точностью до малых высшего порядка,  $\int_{(\tau_k)} \Phi(A_t) dt = \Phi_k \tau_k$ ,

где  $\Phi_k$  — значение функции  $\Phi$  в какой-либо точке  $(H_k)$ , а  $\tau_k$  — суммарная длительность (мера) временного множества  $(\tau_k)$ . Подставляя это выражение в правую часть (4) и пользуясь тем, что при больших  $\beta - \alpha$  в силу свойства эргодичности, сформулированного в начале этого абзаца,  $\frac{\tau_k}{\beta - \alpha} \approx \frac{\mu(H_k)}{\mu(\Omega_E)}$ , получаем приближенное представление при больших  $\beta - \alpha$ :

$$\frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(A_t) dt \approx \sum_k \Phi_k \mu(H_k) / \mu(\Omega_E).$$

Однако сумма, стоящая в правой части, — это интегральная сумма для интеграла по мере  $\mu$  (см. ЭПМ, § VI.4), и при измельчении областей  $(H_k)$  она стремится к этому интегралу. В пределе мы получаем равенство

$$\lim_{\substack{\alpha \rightarrow -\infty \\ \beta \rightarrow \infty}} \frac{1}{\beta - \alpha} \int_{\alpha}^{\beta} \Phi(A_t) dt = \frac{1}{\mu(\Omega_E)} \int_{(\Omega_E)} \Phi d\mu.$$

Его можно сформулировать так: *для эргодичных потоков времени среднее от функции вдоль траектории равно фазовому среднему от этой функции по всему многообразию заданного энергетического уровня; при этом фазовое осреднение осуществляется с помощью инвариантной меры на этом многообразии.* (Сравните формулу (II.14.10).)

Такая замена временных средних на фазовые широко применяется в физике.

Эргодичность и связанные с ней понятия вводятся для любой автономной системы с конечным числом  $N$  степеней свободы, находящейся в потенциальном силовом поле. (Более того — для любой гамильтоновой системы, т. е. системы, описываемой каноническими уравнениями (IV.2.5).) При этом приходится рассматривать поток на  $2N-1$ -мерном многообразии  $(\Omega_E)$  заданного уровня  $E$  энергии в  $2N$ -мерном пространстве координат-импульсов.

Приведем некоторые примеры. Первый из них, на котором особенно легко понять разницу между эргодическими и неэргодическими потоками, строго говоря, не вполне относится к теме этого параграфа, так как он не описывает поведение системы в потенциальном силовом поле. Однако дело в том, что все рассмотренные здесь понятия непосредственно распространяются на потоки, заданные на замкнутом многообразии и обладающие инвариантной мерой, независимо от их происхождения. Потому рассмотрим простейшие потоки на поверхности тора (бублика идеальной формы). Чтобы наглядно представить себе такую поверхность, разрежем ее по параллели и меридиану и разложим (конечно, прибегая к деформации) на единичный квадрат плоскости  $x, y$  (рис. 82); при этом линии разреза перейдут в оси координат: параллель  $ONO$  — в ось  $x$ , а



меридиан  $OMO$  — в ось  $y$ . Боковые стороны квадрата, происшедшие из разреза, надо отождествить, т. е. считать одной и той же линией (две точки  $M$  на правой части рис. 82 считать за одну), равно как и верхнюю сторону квадрата с нижней. Пусть после такого

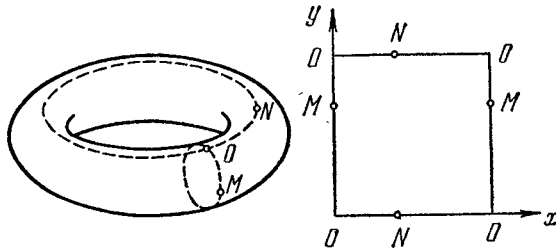


Рис. 82.

«отображения автономный поток на торе задается уравнениями

$$\dot{x}=1, \quad \dot{y}=\lambda,$$

где  $\lambda$  — некоторая постоянная. Здесь инвариантной мерой служит просто площадь в плоскости  $x, y$ .

Одна из траекторий при  $\lambda = \frac{1}{2}$  показана на рис. 83; она замкнутая, так как  $A_2 = A_0$ . Ясно, что и при любом рациональном  $\lambda = \frac{m}{n}$  все

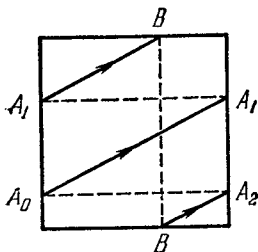


Рис. 83.

траектории будут замкнутыми: каждая точка за время  $T$ , после «опоясывания» тора  $n$  раз в одном измерении и  $m$  раз в другом, вернется в исходное положение, после чего движение будет повторяться. Это случай — не эргодический, и непрерывная функция, постоянная вдоль каждой траектории, может на различных траекториях принимать различные значения.

Однако если  $\lambda$  — иррациональное, то траектория не может замкнуться (почему?) и при своем продолжении будет проходить все в новых и новых местах поверхности. Такое движение получается в результате наложения двух периодических вращений с несоизмеримыми периодами и называется *квазипериодическим*. Можно показать, что такая траектория расположится на поверхности тора всюду плотно и поток будет эргодическим. А так как иррациональных чисел в некотором смысле несравненно больше, чем рациональных (множество рациональных чисел имеет меру нуль; кроме того, оказывается, рациональные числа можно пересчитать, тогда как

для иррациональных такой пересчет невозможен), то типичным является именно эргодический случай.

Эргодичности заведомо не будет, если система подчиняется какому-либо закону сохранения, независимому от закона сохранения полной энергии; другими словами — если соответствующая система дифференциальных уравнений имеет, помимо интеграла энергии, еще по крайней мере один первый интеграл. В самом деле, каждый такой первый интеграл имеет вид соотношения

$$\Psi(p_1, p_2, \dots, p_N, q_1, q_2, \dots, q_N) = C$$

(здесь  $q_i$  — обобщенные координаты, определяющие положение системы, а  $p_i$  — обобщенные импульсы), определяющего расслоение  $2N-1$ -мерного замкнутого многообразия  $(\Omega_E)$  заданного уровня энергии на  $2N-2$ -мерные замкнутые многообразия  $(\Omega_E^C)$ , каждое из которых отвечает некоторому значению константы  $C$ . Если траектория начинается на некотором многообразии  $(\Omega_E^C)$ , то при своем продолжении она не может с этого многообразия сойти и, тем самым, не может заполнять  $(\Omega_E)$  всюду плотно. Если имеется два первых интеграла, независимых друг от друга и от интеграла энергии, то траектории на  $(\Omega_E)$  заполняют  $2N-3$ -мерные многообразия, т. е. мы еще дальше отходим от эргодичности и т. д. Соответственно можно говорить о порядке вырождения системы: система имеет вырожденность  $k$ -го порядка, если она обладает  $k$  первыми интегралами, не зависящими друг от друга и от интеграла энергии, — т. е.  $k$  добавочными законами сохранения.

В качестве примера вырожденной и потому неэргодической системы рассмотрим квадратный бильярд (рис. 84) без трения. Значением энергии  $E$  определяется модуль скорости бильярдного шара, однако направление скорости может быть произвольным; этим определяется трехмерное многообразие  $(\Omega_E)$  (две координаты шара и наклон вектора скорости) в четырехмерном пространстве состояний системы. Но из рис. 84 ясно, что при любой начальной скорости она в дальнейшем будет иметь лишь четыре направления, т. е. здесь имеет место закон сохранения острого угла, образуемого вектором скорости с горизонтальной стороной бильярда. Поэтому все трехмерное пространство состояний расслаивается на двумерные поверхности, отвечающие различным значениям этого угла, причем каждая траектория в фазовом пространстве принадлежит одной из таких поверхностей. Таким образом, рассматриваемая система имеет вырождение 1-го порядка. При этом, если тангенс упомянутого угла рационален (это зависит от начальных условий), то траектории получатся замкнутыми. Если же этот тангенс иррационален, то

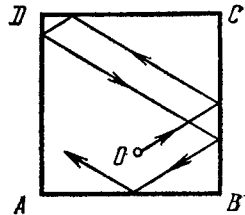


Рис. 84.

траектория заполняет пространство положений всюду плотно, однако в пространстве состояний всюду плотности не будет из-за закона сохранения угла.

Отметим, что такая вырожденность в определенном смысле неустойчива: достаточно как угодно мало изменить какую-либо из сторон бильярда, чтобы вектор скорости стал постепенно поворачиваться, так что траектория системы заполнит ( $\Omega_B$ ) всюду плотно. Если же шар заменить на сгусток невзаимодействующих шариков с одинаковой начальной скоростью, то после указанной деформации стенки система в конце концов придет в стационарное состояние, хотя ожидать этого, возможно, придется очень долго. (Время релаксации, т. е. достижения с какой-либо заданной точностью этого состояния, будет весьма большим.)

Мы предоставляем читателю самостоятельно разобрать пример круглого бильярда. Он также имеет вырождение 1-го порядка. Интересно, что в круглом бильярде траектории не могут заполнять все пространство положений всюду плотно: если такая траектория незамкнута, то она заполняет всюду плотно некоторое кольцо.

Соответствующее осредненное стационарное распределение, инвариантно относительно вращений кольца и обладает бесконечной плотностью на его внутреннем контуре, откуда также ясна неэргодичность.

Вырожденным, а потому неэргодичным, является также движение частицы в сферически-симметричном потенциальном силовом поле. Мы уже упоминали в § 9, что для каждой фазовой траектории при таком поле остаются инвариантными не только полная энергия, но и дополнительно вектор  $G = x \times p$  момента количества движения. Значит, на 5-мерном многообразии заданного уровня полной энергии в фазовом пространстве траектории заполняют  $5 - 3 = 2$ -мерные поверхности, т. е. получается вырождение 3-го порядка. Даже если рассматривать всю картину в плоскости, проходящей через центр системы, то останется вырождение 1-го порядка (продумайте это!). Для важных частных случаев, когда потенциал  $u = k|x|^2$  или  $u = -k/|x|$ , траектории получаются замкнутыми (см. ЭПМ, § XI.3), т. е. порядок вырождения повышается на единицу; мы предлагаем читателю выяснить дополнительный закон сохранения, который при этом появляется.

Следует отметить, что помимо более или менее очевидных законов сохранения, о которых, в основном, говорилось выше, система может обладать скрытыми законами сохранения, обнаружить которые или доказать отсутствие которых бывает довольно трудно. Обнаружение законов сохранения для физических систем очень важно, так как каждый такой закон существенно сказывается на поведении системы и знание его дает новые возможности ее изучения. Укажем в связи с этим, например, на книгу А. И. Б а з я, Я. Б. З е л ь д о в и ч а

и А. М. Переломова «Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике», «Наука», 1971, в которой рассмотрен вопрос о том, как наличие законов сохранения отражается на поведении атомных систем в квантовой механике.

До последнего времени на основании аналогии с простыми примерами считалось, что если у системы нет добавочных законов сохранения, т. е. если она невырождена, то она эргодична. А так как вырожденность при как угодно малом изменении системы, как правило, разрушается, то получалось, что эргодические системы являются более типичными, чем неэргодические. Правда, это не было доказано строго и потому обычно принималось как правдоподобный постулат. Недавние исследования А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда неожиданно показали, что картина на самом деле может быть более сложной. Оказалось, что траектории могут заполнять всюду плотно не все многообразие ( $\Omega_E$ ), а некоторые замкнутые многообразия меньшей размерности, чем ( $\Omega_E$ ), однако столь сложной структуры, что они оказываются обладающими положительной мерой; тогда система не будет ни вырожденной, ни эргодической в описанном выше смысле. Такая картина характерна, в частности, для систем, обладающих более чем одной степенью свободы и находящихся вблизи состояния устойчивого равновесия. При этом подобная структура оказывается «грубой», она сохраняется при достаточно малом изменении системы. Однако при более сильном изменении система может стать эргодической. Таким образом, система, включающая параметры, может в одной области их изменения быть эргодической, а в другой — неэргодической.

### Упражнение

Укажите аналог формулы (5.3) для плотности среды в случае трехмерного эргодического движения среды.

### ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

#### § 1

1. Исключая  $t$  из уравнений (1.11) и обозначив  $\left(\frac{p}{x}\right)_0 = \left(\frac{dp}{dx}\right)_0 = \alpha$ , получаем уравнение для наклона  $\alpha$ , под которым траектории могут входить в начало координат:

$$\alpha = \left(-k - \frac{\lambda}{m_0} \alpha\right) / \left(\frac{\alpha}{m_0}\right),$$

т. е.

$$\alpha^2 + \lambda\alpha + km_0 = 0.$$

Если  $\lambda^2 < 4km_0$ , то направления мнимые, т. е. получается фокус. Если же  $\lambda^2 \geq 4km_0$ , то получается узел с направлениями входа

$$\alpha = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 4km_0}}{2}.$$