и А. М. Переломова «Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике», «Наука», 1971, в которой рассмотрен вопрос о том, как наличие законов сохранения отражается на поведении атомных систем в квантовой механике.

До последнего времени на основании аналогии с простыми примерами считалось, что если у системы нет добавочных законов сохранения, т. е. если она невырождена, то она эргодична. А так как вырожденность при как угодно малом изменении системы, как правило, разрушается, то получалось, что эргодические системы являются более типичными, чем неэргодические. Правда, это не было доказано строго и потому обычно принималось как правдоподобный постулат. Недавние исследования А. Н. Колмогорова и В. И. Арнольда неожиданно показали, что картина на самом деле может быть более сложной. Оказалось, что траектории могут заполнять всюду плотно не все многообразие (Ω_E), а некоторые замкнутые многообразия меньшей размерности, чем (Ω_E), однако столь сложной структуры, что они оказываются обладающими положительной мерой; тогда система не будет ни вырожденной, ни эргодической в описанном выше смысле. Такая картина характерна, в частности, для систем, обладающих более чем одной степенью свободы и находящихся вблизи состояния устойчивого равновесия. При этом подобная структура оказывается «грубой», она сохраняется при достаточно малом изменении системы. Однако при более сильном изменении система может стать эргодической. Таким образом, система, включающая параметры, может в одной области их изменения быть эргодической, а в другой — неэргодической.

Упражнение

Укажите аналог формулы (5.3) для плотности среды в случае трехмерного эргодического движения среды.

ОТВЕТЫ И РЕШЕНИЯ

§ 1

1. Исключая t из уравнений (1.11) и обозначив $\left(\frac{p}{x}\right)_0=\left(\frac{dp}{dx}\right)_0=\alpha$, получаем уравнение для наклона α, под которым траектории могут входить в начало координат:

$$\alpha=\left(-k-\frac{\lambda}{m_0}\alpha\right)\Big/\left(\frac{\alpha}{m_0}\right),$$

т. е.

$$\alpha^2+\lambda\alpha+km_0=0.$$

Если $\lambda^2 < 4km_0$, то направления мнимые, т. е. получается фокус. Если же $\lambda^2 \geqslant 4km_0$, то получается узел с направлениями входа

$$\alpha=\frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda^2-4km_0}}{2}.$$

2. Система уравнений имеет вид

$$\dot{x}=\frac{p}{m_0},\quad \dot{p}=kx-\frac{\lambda}{m_0}p,$$

все коэффициенты положительные. Особая точка имеет тип седла.

3. Уравнение имеет вид

$$\ddot{\varphi}+\frac{g}{h}\sin\varphi=0,$$

где φ — угол отклонения маятника от вертикали, h — его длина, а g — ускорение земного тяготения. Картина траекторий на фазовой плоскости показана

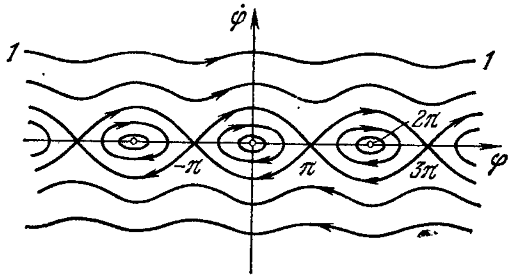

Рис. 85.

на рис. 85; при этом надо иметь в виду, что добавление к φ целого кратного 2π не меняет положения маятника, так что более точно говорить не о фазовой плоскости, а о фазовом цилиндре. Бесконечным траекториям типа *11* отвечают *ротационные* движения маятника, т. е. вращения его вокруг точки подвеса; замкнутым траекториям отвечают *либрационные* движения, т. е. покачивания около вертикали; сепаратрисам отвечают движения, асимптотически стремящиеся к вертикальному положению «вверх ногами» (конечно, при этом массивную точку надо считать подвешенной не на нити, а на стержне нулевой массы).

§ 3

1. Чтобы говорить не о фазовой плотности и о скорости, а о массе, умножим обе части уравнения (3.8) на $\Delta x\,\Delta p\,\Delta t$. Тогда второй член будет равняться уменьшению за время Δt общей массы частиц с импульсами от p до $p+\Delta p$, расположенных в интервале координат от x до $x+\Delta x$, полученному за счет различия плотностей на концах этого интервала. Третий член равен аналогичному уменьшению за счет различия плотностей и ускорений при импульсах p и $p+\Delta p$. Первый член равен увеличению массы частиц в указанных интервалах координат и импульсов. Если частицы не создаются и не исчезают, то сумма всех трех членов должна равняться нулю.

2. Решая систему уравнений $\dot{x}=\frac{p}{m_0}$, $\dot{p}=-m_0\omega^2 x$ при начальных условиях $x|_{t=0}=x_0$, $p|_{t=0}=p_0$, получаем $x=x_0\cos\omega t+\frac{p_0}{m_0\omega}\sin\omega t$, $p=-m_0x_0\omega\sin\omega t+p_0\cos\omega t$. Уравнение неразрывности:

$$\frac{\partial n^\Phi}{\partial t}+\frac{p}{m_0}\frac{\partial n^\Phi}{\partial x}-m_0\omega^2 x\frac{\partial n^\Phi}{\partial p}=0;\quad \frac{dn^\Phi}{dt}=0;\quad \frac{dn^\Phi}{dt}=0.$$

§ 4

1. Кинетическая энергия $T=\frac{1}{2m_0}\iint p^2 n^{\Phi}(x, p, t)\,dx\,dp$. Применение уравнения (3.8) дает $\frac{dT}{dt}=\frac{1}{m_0}\iint F n^{\Phi} p\,dx\,dp$, откуда $T_2-T_1=$ $=\frac{1}{m_0}\int_{t_1}^{t_2} dt \iint F\left(\frac{p}{m_0}, x, t\right) n^{\Phi}(x, p, t)\,p\,dx\,dp$. Это и есть требуемое утверждение.

2. Обозначим через $x=\varphi(t;\ x_0, p_0, t_0)$, $p=\psi(t;\ x_0, p_0, t_0)$ решение системы уравнений (3.5) при начальных данных $x(t_0)=x_0$, $p(t_0)=p_0$. Тогда при $F=F(t)$ будет

$$\psi(t;\ x_0, p_0, t_0)=p_0+\int_{t_0}^{t} F(\tau)\,d\tau,$$

$$\varphi(t;\ x_0, p_0, t_0)=x_0+\frac{1}{m_0}\int_{t_0}^{t}\psi(\tau)\,d\tau = x_0+\frac{p_0}{m_0}(t-t_0)+\frac{1}{m_0}\int_{t_0}^{t}(t-\tau)F(\tau)\,d\tau.$$

Меняя ролями t и t_0, получаем отсюда

$$x_0=x-\frac{p}{m_0}(t-t_0)+\frac{1}{m_0}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)F(\tau)\,d\tau,\quad p_0=p-\int_{t_0}^{t}F(\tau)\,d\tau.$$

Поэтому $\frac{D(x_0, p_0)}{D(x, p)}=\begin{vmatrix} 1 & -\frac{1}{m_0}(t-t_0) \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1$, а значит, фазовая плотность остается инвариантной, и мы получаем

$$n^{\Phi}(x, p, t)=n_0^{\Phi}(x_0, p_0)=$$

$$=n_0^{\Phi}\left(x-\frac{p}{m_0}(t-t_0)+\frac{1}{m_0}\int_{t_0}^{t}(\tau-t_0)F(\tau)\,d\tau,\ p-\int_{t_0}^{t}F(\tau)\,d\tau\right).$$

3. Решение $\delta(\varphi(t_0;\ x, p, t)-x_0)\,\delta(\psi(t_0;\ x, p, t)-p_0)\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, p)}\equiv$ $\equiv\delta(x-\varphi(t;\ x_0, p_0, t_0))\,\delta(p-\psi(t;\ x_0, p_0, t_0))$ представляет собой закон движения единичной частицы под действием заданных сил и служит функцией влияния задачи о построении фазовой плотности по ее начальному распределению.

4. В данном примере $n_0^{\Phi}(x, p)=n_0^{\Phi}\delta(p)$; поэтому $n^{\Phi}(x, p, t)=$ $=n_0^{\Phi}\delta(\psi(t_0;\ x, p, t))\frac{D(\varphi, \psi)}{D(x, p)}$.

5. Параметрическое представление плотности:

$$n^{\Phi}=n_0^{\Phi}e^{-kt},\quad x=\frac{x_0}{b_1-b_2}(b_1e^{b_2t}-b_2e^{b_1t}),\quad p=\frac{b_1b_2m_0x_0}{b_1-b_2}(e^{b_2t}-e^{b_1t}),$$

где $b_{1,2}$ — корни уравнения $m_0b^2+\lambda b+k=0$. Если $\lambda=0$, то $n^{\Phi}\equiv n_0^{\Phi}$. Если $|\lambda|\geqslant 2\sqrt{km_0}$, то особая точка $x=p=0$ поля характеристик на фазовой плоскости представляет собой узел (§ 1) и решение $n^{\Phi}(x, p)$ определено на всей плоскости x, p. Если $0 < |\lambda| < 2\sqrt{km_0}$, то особая точка представляет собой фокус и решение можно строить в области, пересекающейся только с положительной или только с отрицательной полуосью x.

§ 6

1. $$M = \int_{-\infty}^{\infty} Cm_0 \sqrt{2\pi m_0 \vartheta}\, e^{-m_0 \cdot kx^2/2\vartheta}\, dx = 2\pi C m_0 \vartheta / \sqrt{k};$$

$$\mathscr{E} = \iint E n^{\Phi}(E)\, dx\, dp = \iint \left(\frac{p^2}{2m_0} + \frac{m_0 k x^2}{2}\right) C e^{-(p^2/2m_0\vartheta) - (m_0 k x^2/2\vartheta)}\, dx\, dp =$$
$$= \frac{C\sqrt{\pi}}{2} \int (\vartheta \sqrt{2m_0\vartheta} + m_0 k \sqrt{2m_0\vartheta}\, x^2)\, e^{-m_0 k x^2/2\vartheta}\, dx = \pi C \vartheta^2 / \sqrt{k}.$$

2. $M = Cl\sqrt{2\pi\vartheta}\, m_0^{3/2}$; $\mathscr{E} = Cl \sqrt{\frac{\pi}{2} m_0}\, \vartheta^{3/2}$; так как $n^{\Phi}_{\max} = C$, то из сохранения фазовой плотности движущегося элемента следует, что при медленном изменении l (нужном для сохранения распределения по Максвеллу — Больцману) и C сохраняется, откуда $\frac{d\vartheta}{dl} = -\frac{2\vartheta}{l}$, $-\frac{d\mathscr{E}}{dl} = C\sqrt{2\pi m_0}\vartheta^{3/2} = 2\mathscr{E}/l$. Формула (5.5) дает тот же результат.

§ 7

1. $\frac{d\rho}{dt} = -\frac{\rho}{m_0}\frac{dp}{dx}$.

2. Решая уравнение $\ddot{x} = -\omega^2 x$ при начальных условиях $x|_{t=0} = \xi$, $\dot{x}|_{t=0} = \xi^2$, находим $x = \xi\cos\omega t + \xi^2\omega^{-1}\sin\omega t$, откуда $dx = (\cos\omega t + 2\xi\omega^{-1}\sin\omega t)\, d\xi$, $\xi = (-\cos\omega t \pm \sqrt{\cos^2\omega t + 4x\omega^{-1}\sin\omega t})\,\omega/2\sin\omega t$. Таким образом, при каждом t от 0 до $\frac{\pi}{\omega}$ координата x может принимать значения только $\geqslant -\omega\cos^2\omega t/4\sin\omega t$, причем если неравенство строгое, то в точке x имеются частицы с двумя различными скоростями. В силу очевидной общей формулы $\rho(x, t) = \rho_0(\xi)\left|\frac{d\xi}{dx}\right|$ получаем $\rho(x, t) = \rho_0(|\cos\omega t + 2\xi_1\omega^{-1}\sin\omega t|^{-1} + |\cos\omega t + 2\xi_2\omega^{-1}\sin\omega t|^{-1}) = 2\rho_0(\cos^2\omega t + 4x\omega^{-1}\sin\omega t)^{-1/2}$. Уравнение каустики в плоскости x, t получается исключением ξ из равенств $x = \xi\cos\omega t + \xi^2\omega^{-1}\sin\omega t$ и $\frac{dx}{d\xi} = \cos\omega t + 2\xi\omega^{-1}\sin\omega t = 0$, откуда $x = -\omega\cos^2\omega t/4\sin\omega t$. Таким образом, начиная с $t_{\text{кр}} = 0$, уплотнение приходит из $-\infty$, доходит при $t = \frac{\pi}{2\omega}$ до $x = 0$, после чего вновь уходит при $t = \frac{\pi}{\omega} - 0$ к $-\infty$; этим объясняется отличие от основного варианта, описанного в § II.10, где уплотнение зарождалось внутри среды. Интересно отметить, что в рассматриваемом примере $\rho(x, +0) \equiv 2\rho_0$, а не ρ_0: скорость далеких частиц столь велика, что при как угодно малом $t > 0$ они заполняют ось x вторым слоем. При $\frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}$ картина получается симметричной описанной относительно точки $x = 0$, после $t = \frac{2\pi}{\omega}$ процесс периодически повторяется.

§ 8

Положим $\vartheta = t^{\alpha} f(s)$, где $s = t^{\beta} x$; подстановка в заданное уравнение дает после сокращения $(1-\beta) s f'(s) = (\alpha+1) f(s)$. Это равенство при $\alpha = -1$, $\beta = 1$ представляет собой тождество, т. е. мы получаем решение в виде $\vartheta = t^{-1} f(tx)$, где f — произвольная функция. Случаи $\alpha \neq -1$ или $\beta \neq 1$ ничего нового не дают.

§ 9

1. Дифференцируя интеграл (9.6) по параметру t и пользуясь уравнением неразрывности, получаем

$$\frac{dG}{dt} = -\frac{1}{m_0} \int dp \int \sum_i p_i \frac{\partial n^{\Phi}}{\partial x_i} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}\, dx - \int dx \int \sum_i x_i \frac{\partial (n^{\Phi} F)}{\partial p_i} \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{p}\, dp. \quad (1)$$

Выпишем первую проекцию первого интеграла и произведем интегрирование по частям; получим

$$\int dp \int \sum_i p_i \frac{\partial n^{\Phi}}{\partial x_i} (x_2 p_3 - x_3 p_2)\, dx = -\int dp \int n^{\Phi} \sum_i p_i \frac{\partial}{\partial x_i} (x_2 p_3 - x_3 p_2)\, dx.$$

Однако полученная сумма равна $p_1 \cdot 0 + p_2 \cdot p_3 + p_3 \cdot (-p_2) = 0$, а потому вся проекция равна нулю. Преобразуем аналогичным образом первую проекцию второго интеграла:

$$\int dx \int \sum_i x_i \frac{\partial (n^{\Phi} F)}{\partial p_i} (x_2 p_3 - x_3 p_2) = -\int dx \int n^{\Phi} F \sum_i x_i \frac{\partial}{\partial p_i} (x_2 p_3 - x_3 p_2) = 0.$$

Подобным образом проверяется равенство нулю остальных проекций интегралов (1).

2. Вычислим производную от кинетической энергии T по t, воспользуемся уравнением неразрывности и произведем интегрирование по частям; получим

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{2m_0^2} \int dp \int (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}) \sum_i p_i \frac{\partial n^{\Phi}}{\partial x_i} dx - \frac{1}{2m_0} \int dx \int \sum_i (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p}) \frac{\partial}{\partial p_i} (F_i n^{\Phi})\, dp =$$

$$= 0 + \frac{1}{2m_0} \iint \sum_i F_i n^{\Phi} \frac{\partial}{\partial p_i} (\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{p})\, dx\, dp = \frac{1}{m_0} \iint \left(\sum_i F_i p_i \right) n^{\Phi}\, dx\, dp.$$

Правая часть — это мощность внешних сил, действующих на среду. Чтобы она равнялась нулю и, тем самым, кинетическая энергия была постоянной, достаточно, чтобы $\sum_i F_i p_i = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{p} = 0$, т. е. чтобы силы были направлены перпендикулярно скорости частиц (такие силы называются *гироскопическими*).

3. Пусть источник испускает r_0 частиц в единицу времени, а импульс частиц по модулю равен η_0. Тогда

$$n^{\Phi}(x, p, t) = \begin{cases} \dfrac{r_0 m_0}{4\pi \eta_0 |\boldsymbol{x}|^2} \delta\left(p - \eta_0 \dfrac{\boldsymbol{x}}{|\boldsymbol{x}|}\right) & \left(|\boldsymbol{x}| < \dfrac{\eta_0}{m_0} t\right), \\ 0 & \left(|\boldsymbol{x}| > \dfrac{\eta_0}{m_0} t\right). \end{cases}$$

§ 11

$$\rho(x) = 4\sqrt{2}\pi m_0^{5/2} \int n^{\Phi}(E) \sqrt{E - m_0 u(x)}\, dE.$$