из осей координат, как в начале этого параграфа), причем все направления такого перескока равновероятны; в промежутках между этими моментами частицы покоятся. Тогда в малый объем, расположенный в некоторой точке P, при таком перескоке приходят частицы со сферы радиуса h с центром в P, поэтому

$$u(P)\,|_{t+\tau}=\overline{u}^{P,\,h}\,|_t.$$

Отсюда

$$\frac{1}{\tau}\left[u(P)\,|_{t+\tau}-u(P)\,|_t\right]=\frac{1}{\tau}\left[\overline{u}^{P,\,h}-u(P)\right]_t=\varkappa\left\{\frac{6}{h^2}\left[\overline{u}^{P,\,h}-u(P)\right]_t\right\}$$
$$\left(\varkappa=\frac{h^2}{6\tau}\right).$$

Заменяя при малых τ, h левую часть на $\frac{\partial u}{\partial t}$, а выражение в фигурных скобках, в силу формулы (11),— на $\nabla^2 u$, мы приходим к уравнению диффузии (9).

Упражнения

1. Получите аналог формулы (11) для среднего значения по ш а р у с центром в точке P.

2. Напишите общее уравнение (4) для $K(P,\ Q,\ t)=Ae(h-PQ)$ ($e(s)$ — единичная функция) и получите отсюда уравнение диффузии (9) при $h\to 0$, $A=A(h)$ с помощью упражнения 1.

§ 4. Свойства решений уравнения диффузии в безграничной среде

В этом параграфе мы покажем, что целый ряд свойств решений уравнения диффузии

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=\varkappa\nabla^2\rho \qquad (1)=(3.8)$$

можно вывести непосредственно из самого этого уравнения, не располагая еще формулами для решения. Мы будем для определенности рассматривать одномерный случай $\left(\nabla^2\rho=\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right)$, хотя аналогичные свойства справедливы также на плоскости и в пространстве. Кроме того, будем считать, что ρ при $x\to\pm\infty$ достаточно быстро стремится к нулю.

Первым свойством является принцип суперпозиции (возможность наложения плотностей друг на друга), о котором мы упоминали в § 2. Математически это свойство выражается в том, что уравнение (1), которому удовлетворяют распределения плотностей,— линейное и однородное, а потому сумма его решений служит решением того же уравнения. Из принципа суперпозиции вытекает, в частности, что хотя плотность среды из частиц по своему физическому смыслу не может быть отрицательной, но имеет смысл рассматривать решения уравнения (1), имеющие произвольный знак, которые могут быть истолкованы как отличие одной плотности от другой (например, отличие плотности среды от некоторой постоянной), т. е. как разность между двумя реальными плотностями.

Следующим важным свойством является закон сохранения массы

$$\int \rho(x, t)\,dx = M_0 = \text{const} \tag{2}$$

(здесь и далее интегрирование производится от $-\infty$ до ∞). В интеграле (2) переменная t служит параметром, поэтому и результат интегрирования мог бы зависеть от t; но оказывается, что на самом деле интеграл (2) от t не зависит. Конечно, это утверждение является весьма естественным, так как условие сохранения масс было положено в основу вывода уравнения диффузии, однако, поскольку при этом выводе были произведены упрощения, то все-таки приятно, что закон сохранения масс можно вывести из самого уравнения.

Для доказательства формулы (2) продифференцируем левую часть по t как по параметру, после чего воспользуемся уравнением (1) и произведем интегрирование:

$$\frac{d}{dt}\int \rho(x, t)\,dx = \int \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx = \varkappa \int \frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\,dx = \varkappa \left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x=-\infty}^{\infty}.$$

Однако в силу сказанного выше $\partial\rho/\partial x$ на обоих концах интервала интегрирования, т. е. при $x = \pm\infty$, должно равняться нулю. Значит, $\frac{d}{dt}\int \rho\,dx = 0$, откуда и получаем утверждение (2).

Свойством (2) обладают также решения общего уравнения (2.4). В самом деле, для таких решений

$$\frac{d}{dt}\int \rho\,dx = \int \frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx = \int dx \int K(s, x, t)\,\rho(s, t)\,ds - \int \left[\int K(x, s, t)\,ds\right] \rho(x, t)\,dx.$$

Замена в одном из полученных двойных интегралов букв s, x на x, s показывает, что правая часть равна нулю, откуда и следует наше утверждение.

Вернемся к уравнению диффузии (1) и покажем, что интеграл

$$\int x\rho(x, t)\,dx = M_1 \tag{3}$$

(*момент* 1-*го порядка* для решения ρ) также инвариантен во времени. Это доказывается, как свойство (2), путем дифференцирования интеграла (3) по параметру t с последующим применением уравнения (1) и интегрирования по частям:

$$\frac{d}{dt}\int x\rho(x, t)\,dx = \int x\frac{\partial\rho}{\partial t}\,dx = \varkappa \int x\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\,dx = \varkappa \int x\,d\frac{\partial\rho}{\partial x} =$$
$$= \varkappa\left(x\left.\frac{\partial\rho}{\partial x}\right|_{x=-\infty}^{\infty} - \int \frac{\partial\rho}{\partial x}\,dx\right) = \varkappa\left(x\frac{\partial\rho}{\partial x} - \rho\right)_{x=-\infty}^{\infty} = 0,$$

откуда и вытекает наше утверждение.

Из инвариантности массы M_0 и момента 1-го порядка M_1 вытекает неподвижность центра тяжести рассматриваемой среды из частиц, который вычисляется по формуле $x_{\text{ц.т.}}=M_1/M_0$. Эта инвариантность, конечно, вытекает из изотропии закона диффузии. Интересно отметить, что распределение плотности при этом вовсе не обязано быть симметричным.

Проведем аналогичное рассмотрение момента 2-го порядка:

$$\frac{d}{dt}\int x^2\rho\,dx=\int x^2\frac{\partial\rho}{\partial t}dx=\varkappa\int x^2\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}dx=\varkappa\left(x^2\frac{\partial\rho}{\partial x}\Big|_{x=-\infty}^{\infty}-2\int x\frac{\partial\rho}{\partial x}dx\right)=$$

$$=-2\varkappa\int_{-\infty}^{\infty}x\frac{\partial\rho}{\partial x}\,dx=-2\varkappa\left(x\rho\Big|_{x=-\infty}^{\infty}-\int\rho\,dx\right)=2\varkappa\int\rho\,dx.$$

Мы пришли к интересной формуле

$$\frac{d}{dt}\int x^2\rho\,dx=2\varkappa\int\rho\,dx; \tag{4}$$

а так как правая часть, в силу свойства (2), инвариантна во времени, то момент 2-го порядка для решения меняется по линейному закону:

$$M_2=\int x^2\rho\,dx=\int x^2\rho\,dx\Big|_{t=t_0}+\left(2\varkappa\int\rho\,dx\right)(t-t_0).$$

Из формулы (4), на основании инвариантности массы и момента 1-го порядка, сразу следует, что при любом постоянном a будет

$$\frac{d}{dt}\int(x-a)^2\rho\,dx=2\varkappa M_0. \tag{5}$$

Нетрудно проверить (мы предоставляем это читателю), что интеграл в левой части, зависящий от a, принимает минимальное значение, если положить $a=x_{\text{ц.т.}}$; тогда он будет представлять собой момент инерции I среды из частиц. Мы видим, что момент инерции не сохраняется, а возрастает по линейному закону; это связано с постепенным «расползанием» частиц.

Полученные соотношения приобретают более простой вид в терминах осреднения по мере m с элементом $dm=\rho\,dx$ (сравните с § II.14). В самом деле, например

$$\overline{(x-a)^2}^m=\frac{1}{M_0}\int(x-a)^2\,dm=\frac{1}{M_0}\int(x-a)^2\rho\,dx,$$

поэтому формулу (5) можно записать так: $d[\overline{(x-a)^2}^m]/dt=2\varkappa$.

Можно провести аналогичное исследование и моментов высшего порядка для решения (см. упражнения).

Другая группа свойств решений уравнения (1) имеет локальный характер и связана с рассасыванием максимумов и минимумов этих решений. Так, можно проверить, что (за исключением тривиального случая, когда $\rho\equiv0$) максимальное значение решения $\max\limits_x\rho(x,t)$

убывает во времени. В самом деле, пусть для некоторого $t=t_1$ плотность $\rho(x, t)$ имеет наибольшее значение (наибольший из максимумов, если их несколько) ρ_1, которое достигается при некотором $x=x_1$. Как известно, в точке максимума вторая производная отрицательна, точнее, $\left.\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}\right|_{\substack{t=t_1\\x=x_1}} \leqslant 0$. Примем, что это неравенство строгое (более детальное рассмотрение показывает, что это предположение несущественно). Тогда из уравнения диффузии мы получаем, что и $\left.\frac{\partial\rho}{\partial t}\right|_{\substack{t=t_1\\x=x_1}} < 0$, а потому $\max\limits_x \rho(x, t)$ при t, бо́льших t_1 и близких к t_1, будет меньше, чем ρ_1. Отсюда, в силу произвольности t_1, получаем, что рассматриваемое наибольшее значение убывает для всех t, что и требовалось доказать.

Из проведенного рассуждения вытекает также, что значения ρ в малой окрестности точки любого (не обязательно наибольшего) максимума с ростом времени убывают и, аналогично, значения в окрестности точки минимума возрастают. Следует только иметь в виду, что если плотность, как функция x, имеет несколько максимумов и минимумов, то с течением времени соседние максимумы и минимумы могут сливаться и нейтрализовать друг друга. Например, на рис. 90 показан случай, когда в некоторый момент t_1 зависимость $\rho(x)$ имела пять максимумов и четыре минимума. Максимальные значения убывали, а минимальные возрастали (причем точки экстремума, кроме центральной, смещались), пока в некоторый момент t_2 крайние минимумы не слились с соседними внутренними максимумами, породив точки перегиба, а средние минимумы — с центральным максимумом, породив точку минимума. Далее происходила эволюция двух максимумов и одного минимума (t_3), пока они не слились в один центральный максимум, после чего центральное максимальное значение стало монотонно убывать (t_4). Таким образом, центральное значение сначала убывало, затем некоторое время возрастало, после чего стало монотонно убывать до $\rho=0$ при $t=\infty$.

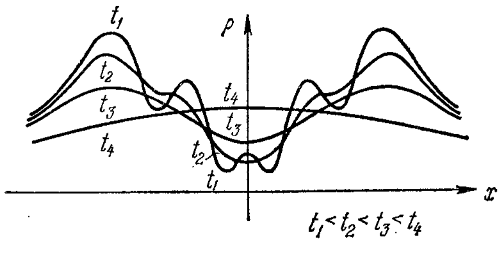

Рис. 90.

Видно, что максимумы и минимумы могут только сохраняться или нейтрализоваться, новых экстремумов появиться не может. Из описанного поведения экстремальных значений вытекает, в частности, что если в некоторый момент $\rho(x)>0$ (достаточно даже, чтобы $\rho(x)\geqslant 0$, лишь бы $\rho(x)\not\equiv 0$), то и во все дальнейшие моменты будет $\rho(x)>0$. Аналогично, если $\rho(x)<\rho_0=\text{const}$ в некоторый момент, то и во все дальнейшие моменты тоже. Так как уравнению диффузии удовлетворяет и температура среды в процессе свободной теплопроводности, то мы видим, что невозможны «всплески» температуры, т. е. тепло нельзя «сфокусировать» с помощью теплопроводности.

Некоторые свойства решений вытекают из рассмотрения преобразований, при которых уравнение (1) переходит в себя. Так, например, уравнение (1) переходит в себя при замене x на $-x$. Отсюда следует, что если некоторая функция $\varphi(x, t)$ служит решением этого уравнения, то и функция $\varphi(-x, t)$ — тоже (изотропия закона диффузии!). Поэтому при зеркальном отражении начального распределения плотностей относительно некоторой точки и дальнейшее распределение плотностей испытает такое же преобразование. Если же начальное распределение плотностей было симметричным (четным), то при указанном отражении оно переходит в себя, а потому и дальнейшее распределение плотностей будет симметричным (это свойство сохранения четности), как на рис. 90.

Рассмотрев одновременную замену $x \to -x$, $y \to -y$, нетрудно проверить аналогичное свойство сохранения нечетности. (Отметим, что нечетная функция обязательно сменяет знак, так что тут надо иметь в виду сделанное в начале параграфа замечание о суперпозиции.)

Однако замены t на $-t$ уравнение (1) не выдерживает! Это приводит к существенным затруднениям при решении уравнения (1) назад во времени (т. е. при решении задачи о восстановлении исходного распределения плотностей по заданному конечному распределению), о которых мы еще скажем. Пока отметим только непосредственное следствие из формулы (4): если задано распределение $\rho|_{t=t_0}$, то при условии $\rho \geqslant 0$ решение назад во времени может быть продолжено не дальше, чем на временной интервал $\Delta t = I|_{t=t_0}/(2\varkappa M_0)$ (почему?). Таким образом, неограниченное продолжение решения назад во времени при условии $\rho \geqslant 0$ невозможно.

Упражнения

1. Получите аналог соотношения (2) для неоднородного уравнения диффузии $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + f(x, t)$, в котором функция f пропорциональна пространственно-временно́й плотности частиц, поступающих в среду.
2. Найдите закон изменения во времени момента 3-го порядка для решения уравнения диффузии; то же — для момента n-го порядка.

§ 5. Особое (автомодельное) решение уравнения диффузии

Перейдем к построению решений уравнения диффузии, причем для простоты будем рассматривать одномерный случай, т. е. уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \varkappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}; \qquad (1) = (1.8)$$