

и во все дальнейшие моменты тоже. Так как уравнению диффузии удовлетворяет и температура среды в процессе свободной теплопроводности, то мы видим, что невозможны «всплески» температуры, т. е. тепло нельзя «сфокусировать» с помощью теплопроводности.

Некоторые свойства решений вытекают из рассмотрения преобразований, при которых уравнение (1) переходит в себя. Так, например, уравнение (1) переходит в себя при замене x на $-x$. Отсюда следует, что если некоторая функция $\varphi(x, t)$ служит решением этого уравнения, то и функция $\varphi(-x, t)$ — тоже (изотропия закона диффузии!). Поэтому при зеркальном отражении начального распределения плотностей относительно некоторой точки и дальнейшее распределение плотностей испытает такое же преобразование. Если же начальное распределение плотностей было симметричным (четным), то при указанном отражении оно переходит в себя, а потому и дальнейшее распределение плотностей будет симметричным (это свойство сохранения четности), как на рис. 90.

Рассмотрев одновременную замену $x \rightarrow -x$, $y \rightarrow -y$, нетрудно проверить аналогичное свойство сохранения нечетности. (Отметим, что нечетная функция обязательно сменяет знак, так что тут надо иметь в виду сделанное в начале параграфа замечание о суперпозиции.)

Однако замены t на $-t$ уравнение (1) не выдерживает! Это приводит к существенным затруднениям при решении уравнения (1) назад во времени (т. е. при решении задачи о восстановлении исходного распределения плотностей по заданному конечному распределению), о которых мы еще скажем. Пока отметим только непосредственное следствие из формулы (4): если задано распределение $\rho|_{t=t_0}$, то при условии $\rho \geq 0$ решение назад во времени может быть продолжено не дальше, чем на временной интервал $\Delta t = l|_{t=t_0} / (2\kappa M_0)$ (почему?). Таким образом, неограниченное продолжение решения назад во времени при условии $\rho \geq 0$ невозможно.

Упражнения

1. Получите аналог соотношения (2) для неоднородного уравнения диффузии $\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} + f(x, t)$, в котором функция f пропорциональна пространственно-временной плотности частиц, поступающих в среду.

2. Найдите закон изменения во времени момента 3-го порядка для решения уравнения диффузии; то же — для момента n -го порядка.

§ 5. Особое (автомодельное) решение уравнения диффузии

Перейдем к построению решений уравнения диффузии, причем для простоты будем рассматривать одномерный случай, т. е. уравнение

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}; \quad (1) = (1.8)$$

коэффициент диффузии κ мы будем впредь считать постоянным. Мы начнем с построения особых (автомодельных) решений, о которых мы упоминали в § IV.6, причем привлечем соображения размерности. Дело в том, что из величин x , t , κ , которые могут входить в решение, можно составить, с точностью до возведения в степень, лишь одну безразмерную комбинацию

$$s = \frac{x^2}{\kappa t}.$$

Поэтому, если в решение входит какая-либо безразмерная функция от безразмерного аргумента, то она должна иметь вид $f(s) = f\left(\frac{x^2}{\kappa t}\right)$. Добавляя в качестве множителя степень t , которая сохраняется, с точностью до постоянного коэффициента, при изменении масштаба, мы приходим к форме решения

$$\rho = At^\alpha f\left(\frac{x^2}{\kappa t}\right) \quad (2)$$

с размерным постоянным коэффициентом A .

Теперь нам надо подобрать функцию f и показатель α так, чтобы удовлетворить уравнению (1) (в силу линейности уравнения (1) коэффициент A при этом остается произвольным). Конечно, не следует думать, что для любого α о уравнения возможно построить такое автомодельное решение. То, что нам все-таки удастся это сделать, получается в результате определенной симметрии (однородности и изотропности) в постановке физической задачи; эта симметрия проявляется как в дифференциальном уравнении, так и в начальном условии.

Будем считать решение (2) четной функцией x и уменьшим число подбираемых параметров, воспользовавшись законом (4.2) сохранения масс, который для решения (2) имеет вид

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\infty} At^\alpha f\left(\frac{x^2}{\kappa t}\right) dx &= 2 \int At^\alpha f(s) \sqrt{\frac{\kappa t}{2}} \frac{ds}{\sqrt{s}} = \\ &= 2A \sqrt{\frac{\kappa t}{2}} t^{\alpha+1/2} \int s^{-1/2} f(s) ds = \text{const} \end{aligned}$$

(мы применили замену переменной интегрирования $\frac{x^2}{\kappa t} = s$). Так как результат не должен зависеть от t , то

$$\alpha + \frac{1}{2} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \alpha = -\frac{1}{2}. \quad (3)$$

(Нечетное по x автомодельное решение будет построено в § 11.)

Итак, мы пришли к форме решения

$$\rho = At^{-1/2} f\left(\frac{x^2}{\kappa t}\right). \quad (4)$$

Чтобы найти функцию f , подставим это выражение в уравнение (1),

для чего вычислим производные

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} &= -\frac{A}{2} t^{-3/2} f(s) - \frac{A}{x} x^2 t^{-3/2} f'(s), & \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{2A}{x} x t^{-3/2} f'(s), \\ \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2} &= \frac{2A}{x} t^{-3/2} f'(s) + \frac{4A}{x^2} x^2 t^{-3/2} f''(s).\end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (1) и умножив обе части полученного равенства на $\frac{2}{A} t^{3/2}$, приходим к уравнению

$$-f(s) - \frac{2x^2}{xt} f'(s) = 4f'(s) + \frac{8x^2}{xt} f''(s),$$

т. е.

$$8sf''(s) + (2s+4)f'(s) + f(s) = 0. \quad (5)$$

Таким образом, для нахождения неизвестной функции в автомодельном решении получилось обыкновенное дифференциальное уравнение. В этом состоит важное преимущество автомодельных решений, когда их удается построить, так как в целом обыкновенные дифференциальные уравнения существенно проще, чем уравнения с частными производными.

Обыкновенные линейные дифференциальные уравнения 2-го порядка с переменными коэффициентами редко интегрируются в квадратурах. Однако уравнение (5) представляет собой счастливое исключение, так как его левая часть допускает факторизацию, т. е. представление в виде итерации двух дифференциальных выражений 1-го порядка. Обозначив операцию дифференцирования буквой D , мы можем переписать левую часть в виде

$$[8sD^2 + (2s+4)D + 1]f \equiv (2sD+1)(4D+1)f.$$

(Продумайте это представление! Почему нельзя левую часть представить в виде $(4D+1)(2sD+1)$?) Обозначив $(4D+1)f = h$, перепишем уравнение (5) в виде

$$(2sD+1)h = 0, \text{ т. е. } 2s \frac{dh}{ds} + h = 0.$$

Отсюда, разделяя переменные, получаем

$$\frac{dh}{h} = -\frac{ds}{2s}, \text{ т. е. } h = \frac{C_1}{\sqrt{s}}.$$

Теперь возвращаемся к функции f :

$$(4D+1)f = \frac{C_1}{\sqrt{s}}, \text{ т. е. } 4f' + f = \frac{C_1}{\sqrt{s}}.$$

Решение этого уравнения, которое мы предоставляем читателю, приводит к формуле

$$f(s) = \left(\frac{C_1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{s}} e^{s/4} ds + C_2 \right) e^{-s/4}.$$

Таким образом, мы получили два линейно независимых решения

$$f_1(s) = e^{-s/4} \int_0^s \frac{1}{\sqrt{s_1}} e^{s_1/4} ds_1, \quad f_2(s) = e^{-s/4}.$$

Первое из этих решений при $s \rightarrow 0$ имеет порядок $\sqrt{s} \propto x$, т. е. является нечетной функцией x , вопреки предположению. Даже если не обращать на это внимания, но ограничиться положительными решениями, то это решение отпадает, как сменяющее знак. (Эту смену знака нельзя устранить добавлением второго решения, так как при $s \rightarrow \infty$ $f_1(s) \gg f_2(s)$.) Второе решение вполне пригодно, и в силу (4) мы получаем автомодельное решение уравнения (1):

$$\rho(x, t) = At^{-1/2} e^{-x^2/4\kappa t}, \quad (6)$$

где A — произвольная постоянная.

Графики построенного автомодельного решения при различных $t > 0$ показаны на рис. 91. Это симметричные колоколообразные кривые, очень быстро приближающиеся при увеличении $|x|$ к

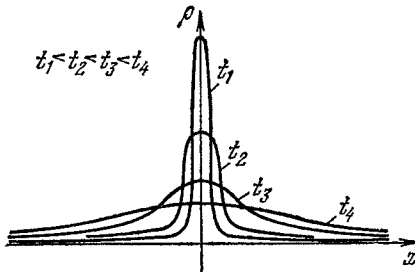


Рис. 91.

оси x ; они хорошо известны в теории вероятностей, где описывают закон распределения Гаусса. Площадь, заключенная между любым из графиков рассматриваемого семейства и осью x , одна и та же, она равна суммарной массе диффундирующих частиц:

$$\begin{aligned} M &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A}{\sqrt{t}} e^{-x^2/4\kappa t} dx = \left| x = 2\sqrt{\kappa t} y \right| = \\ &= \frac{A}{\sqrt{t}} 2\sqrt{\kappa t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = 2A\sqrt{\pi\kappa} \quad (7) \end{aligned}$$

(последний интеграл равен $\sqrt{\pi}$; он вычислен, например, в ЭПМ, § IV.7). Как видим, результат не зависит от t . Так как при приближении t к нулю колокол все сильнее сжимается к оси x , становясь выше, т. е. растягиваясь от оси x во столько же раз, то в пределе, при $t \rightarrow +0$, функция (6) становится пропорциональной дельта-функции $\delta(x)$. Учитывая (7), получаем

$$\rho(x, +0) = 2A\sqrt{\pi\kappa} \delta(x).$$

Таким образом, решение (6) описывает эволюцию сгустка частиц массы $M = 2A\sqrt{\pi\kappa}$, который в момент $t=0$ был сосредоточен в на-

чале координат оси x . В частности, при $M=1$ получаем решение

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} e^{-x^2/4kt}, \quad (8)$$

описывающее эволюцию единичной массы, первоначально сосредоточенной в точке $x=0$.

Приведем еще один вывод рассматриваемого особого решения, основанный на его приближенной дискретной конструкции, по существу содержащейся в § 1. Для этого заметим, что если в условиях § 1 в момент $t=0$ в узле $x=0$ содержалось большое число частиц общей массы M , то в момент $n\tau$ ($n=1, 2, 3, \dots$) эти частицы расположатся в узлах $-nh, (-n+2)h, \dots, nh$, причем масса частиц в каждом узле $(-n+2k)h$ будет равна

$$m_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} 2^{-n} M.$$

Воспользуемся формулой Стирлинга (см., например, ЭПМ, § III.3) для факториалов больших чисел

$$n! \approx \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad (9)$$

относительная погрешность которой быстро стремится к нулю с возрастанием n . Мы получим приближенное представление

$$\begin{aligned} m_{n,k} &= \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \left[\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e}\right)^k \sqrt{2\pi(n-k)} \left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k} \right]^{-1} 2^{-n} M = \\ &= \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} n^n k^{-k} (n-k)^{-(n-k)} 2^{-n} M. \end{aligned} \quad (10)$$

Однако из равенств $t = n\tau$, $x = (-n+2k)h$ получаем, что $n = \frac{t}{\tau}$, $k = \frac{x}{2h} + \frac{t}{2\tau}$, $n-k = \frac{t}{2\tau} - \frac{x}{2h}$; подставляя эти выражения в (10), приходим к формуле

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \frac{1}{2h} m_{n,k} = \\ &= \frac{1}{2h} \sqrt{\frac{t}{2\pi\tau} \left(\frac{t^2}{4\tau^2} - \frac{x^2}{4h^2}\right)^{-1}} \left(\frac{t}{\tau}\right)^{t/\tau} \left(\frac{x}{2h} + \frac{t}{2\tau}\right)^{-\frac{x}{2h} - \frac{t}{2\tau}} \times \\ &\quad \times \left(\frac{t}{2\tau} - \frac{x}{2h}\right)^{\frac{x}{2h} - \frac{t}{2\tau}} 2^{-t/\tau} M. \end{aligned}$$

Подставим сюда выражение $\frac{1}{2\tau} = \frac{\kappa}{h^2}$ (см. (1.6)) и вынесем из скобок члены, содержащие t , которые при малом h являются главными (почему?). Это даст

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \left(1 - \frac{h^2 x^2}{4\kappa^2 t^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{xh}{2\kappa t}\right)^{-\frac{x}{2h} - \frac{\kappa t}{h^2}} \left(1 - \frac{xh}{2\kappa t}\right)^{\frac{x}{2h} - \frac{\kappa t}{h^2}} M.$$

При малом h (точнее, надо говорить о малом значении безразмерной комбинации $\frac{hx}{\kappa t}$) второй множитель можно заменить на 1, тогда как два последних удобно преобразовать следующим образом:

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa t}} \left(1 + \frac{xh}{2\kappa t}\right)^{-\frac{x}{2h}} \left(1 - \frac{xh}{2\kappa t}\right)^{\frac{x}{2h}} \left(1 - \frac{x^2 h^2}{4\kappa^2 t^2}\right)^{-\frac{\kappa t}{h^2}} M.$$

Теперь надо воспользоваться тем, что при малом α будет $(1 + \alpha\alpha)^{b/\alpha} \approx e^{ab}$. Мы получаем при малом h

$$\rho(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa t}} e^{-\frac{x}{2\kappa t}} \cdot e^{-\frac{x}{2\kappa t}} \cdot e^{-\frac{x}{2\kappa t}} \cdot e^{-\frac{x^2}{4\kappa^2 t^2} \cdot \kappa t} M = \frac{1}{2\sqrt{\pi \kappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\kappa t}} M.$$

Итак, мы вновь пришли к формуле (6). Из нее уже нетрудно проверить свойства, о которых говорилось выше,— автомодельность и выполнение уравнения (1).

Отметим, что в § 7 будет приведен еще один вывод формул для решения уравнения диффузии, основанный на применении преобразования Фурье.

Особое решение уравнения диффузии на плоскости и в пространстве строится аналогично тому, как на прямой. Так, в пространстве оно имеет вид

$$\rho(x, y, z, t) = At^{-3/2} e^{-(x^2 + y^2 + z^2)/4\kappa t},$$

где произвольная постоянная A связана с суммарной массой M диффундирующих частиц формулой

$$M = (2\sqrt{\kappa\pi})^3 A.$$

Множители $t^{-1/2}$ в решении на прямой и $t^{-3/2}$ — в пространстве легко понять из следующих соображений баланса. Как следует из вероятностных соображений и будет подробно обсуждаться в § 8, средний пробег частиц при случайном блуждении пропорционален \sqrt{t} . Значит, с такой скоростью будут расти средние размеры расплывающегося облака частиц, а в пространственном случае объем облака пропорционален $(\sqrt{t})^3 = t^{3/2}$. (При этом мы игнорируем разлетающиеся с большей скоростью края облака, несущие ничтожную часть его общей массы; для этого можно рассматривать только ту часть облака, в которой плотность превышает определенную фиксированную долю от максимальной.) А так как масса облака не меняется во времени, то плотность должна получить обратный множитель.

§ 6. Решение задачи Коши

Допустим теперь, что мы хотим найти решение уравнения диффузии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \rho}{\partial x^2}, \quad (1) = (1.8)$$