При малом h (точнее, надо говорить о малом значении безразмерной комбинации $\frac{hx}{\varkappa t}$) второй множитель можно заменить на 1, тогда как два последних удобно преобразовать следующим образом:

$$\rho(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\left(1+\frac{xh}{2\varkappa t}\right)^{-\frac{x}{2h}}\left(1-\frac{xh}{2\varkappa t}\right)^{\frac{x}{2h}}\left(1-\frac{x^2h^2}{4\varkappa^2t^2}\right)^{-\frac{\varkappa t}{h^2}} M.$$

Теперь надо воспользоваться тем, что при малом α будет $(1+a\alpha)^{b/\alpha} \approx e^{ab}$. Мы получаем при малом h

$$\rho(x,\ t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}} e^{-\frac{x}{2\varkappa t}\cdot\frac{x}{2}} e^{-\frac{x}{2\varkappa t}\cdot\frac{x}{2}} e^{\frac{x^2}{4\varkappa^2t^2}\cdot\varkappa t} M = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}} e^{-\frac{x^2}{4\varkappa t}} M.$$

Итак, мы вновь пришли к формуле (6). Из нее уже нетрудно проверить свойства, о которых говорилось выше,— автомодельность и выполнение уравнения (1).

Отметим, что в § 7 будет приведен еще один вывод формул для решения уравнения диффузии, основанный на применении преобразования Фурье.

Особое решение уравнения диффузии на плоскости и в пространстве строится аналогично тому, как на прямой. Так, в пространстве оно имеет вид

$$\rho(x,\ y,\ z,\ t) = At^{-3/2}e^{-(x^2+y^2+z^2)/4\varkappa t},$$

где произвольная постоянная A связана с суммарной массой M диффундирующих частиц формулой

$$M = (2\sqrt{\varkappa\pi})^3 A.$$

Множители $t^{-1/2}$ в решении на прямой и $t^{-3/2}$ — в пространстве легко понять из следующих соображений баланса. Как следует из вероятностных соображений и будет подробно обсуждаться в § 8, средний пробег частиц при случайном блуждении пропорционален $\sqrt{t}$. Значит, с такой скоростью будут расти средние размеры расплывающегося облака частиц, а в пространственном случае объем облака пропорционален $(\sqrt{t})^3 = t^{3/2}$. (При этом мы игнорируем разлетающиеся с большей скоростью края облака, несущие ничтожную часть его общей массы; для этого можно рассматривать только ту часть облака, в которой плотность превышает определенную фиксированную долю от максимальной.) А так как масса облака не меняется во времени, то плотность должна получить обратный множитель.

§ 6. Решение задачи Коши

Допустим теперь, что мы хотим найти решение уравнения диффузии

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = \varkappa\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}, \qquad (1) = (1.8)$$

удовлетворяющее произвольному начальному условию

$$\rho|_{t=t_0}=\rho_0(x) \qquad (-\infty < x < \infty). \tag{2}$$

В силу линейности задачи (выражающейся в линейности уравнения (1)) решение $\rho(x, t)$ зависит от начальной функции $\rho_0(x)$ по линейному закону. Поэтому при построении решения можно применить общий метод, упомянутый в § II.2 и основанный на построении функции влияния. Для этого обозначим через $G(x, t; \xi, t_0)$ решение уравнения (1) при начальном условии

$$\rho|_{t=t_0}=\delta(x-\xi).$$

Таким образом, функция влияния (функция Грина) в данной задаче описывает эволюцию при $t>t_0$ частиц суммарной единичной массы, сосредоточенных в момент $t=t_0$ в точке $x=\xi$. Поэтому при $t_0=0$, $\xi=0$ выражение функции влияния имеет вид (5.8). При произвольных t_0, ξ это выражение получается с помощью добавочного сдвига по t и по x (что возможно из-за однородности рассматриваемой системы во времени и в пространстве):

$$G(x, t; \xi, t_0)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa(t-t_0)}}e^{-(x-\xi)^2/4\varkappa(t-t_0)}. \tag{3}$$

Зная функцию влияния, мы можем написать искомое решение при произвольном начальном условии (2):

$$\rho(x, t)=\int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; \xi, t_0)\,\rho_0(\xi)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa(t-t_0)}}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_0(\xi)\,e^{-(x-\xi)^2/4\varkappa(t-t_0)}\,d\xi. \tag{4}$$

Эта формула была получена выдающимся французским механиком, физиком и математиком С. Пуассоном (1781—1840). В ней, по существу, содержится и представление функции Дирака (функция (3) при $t\to t_0+0$)*).

Формула (4) дает возможность в отдельных случаях точно, а чаще численно получать решение рассматриваемой задачи. Кроме того, из нее можно получить и другие полезные следствия.

Выделим, например, из экспоненты в правой части (4) множитель, не зависящий от ξ; это даст

$$\rho(x, t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa(t-t_0)}}e^{-x^2/4\varkappa(t-t_0)}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_0(\xi)\,e^{(2x\xi-\xi^2)/4\varkappa(t-t_0)}\,d\xi. \tag{5}$$

*) Это, конечно, отнюдь не единственное представление функции Дирака; широкий способ получения подобных представлений указан в ЭПМ, § VI.1.

Отсюда, в частности, легко получить асимптотическое выражение решения при $t\to\infty$. В самом деле, если x при этом остается конечным, то и экспонента под знаком последнего интеграла остается конечной и стремится к 1, а потому весь интеграл стремится к интегралу $\int\rho_0(\xi)\,d\xi$, равному общей массе M диффундирующих частиц. Таким образом, в силу (5) решение имеет асимптотическое представление

$$\rho(x,\ t)\sim\frac{M}{2\sqrt{\pi\varkappa(t-t_0)}}e^{-x^2/4\varkappa(t-t_0)}=MG(x,\ t;\ 0,\ t_0);\qquad(6)$$

другими словами, мы получили автомодельное решение, построенное в § 5. Это и естественно: по прошествии достаточного времени детали начального распределения частиц становятся несущественными, играет роль только суммарная масса частиц *).

Взамен (6) можно воспользоваться асимптотическим представлением $\rho(x,\ t)\sim MG(x,\ t;\ a_1,\ t_0)$ при любом постоянном a. Естественно ожидать, что, подбирая a, можно сделать это представление более точным, чем (6). При большом t имеем

$$\rho(x,\ t):G(x,\ t;\ a,\ t_0)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\rho_0(\xi)\,e^{[2(x-a)(\xi-a)-(\xi-a)^2]/4\varkappa(t-t_0)}\,d\xi=$$
$$=\int\rho_0(\xi)\left[1+\frac{2(x-a)(\xi-a)-(\xi-a)^2}{4\varkappa(t-t_0)}+\ldots\right]d\xi=$$
$$=M+\frac{x-a}{2\varkappa(t-t_0)}(M_1-aM)-\frac{1}{4\varkappa(t-t_0)}\int\rho_0(\xi)(\xi-a)^2\,d\xi+\ldots\qquad(7)$$

Второе слагаемое в правой части, зависящее от x, можно обратить в нуль, положив $M_1-aM=0$, откуда $a=M_1/M$, т. е. a равно центру тяжести $x_{\text{ц.т.}}$ рассматриваемой среды из частиц. Мы уже говорили в § 4, что при этом a значение I последнего, не зависящего от x члена в правой части (7) будет минимально возможным.

Еще более точный результат получится, если в асимптотическом выражении изменить начальный момент времени так, чтобы уравнять моменты инерции. В силу § 4 для этого в формуле $\rho(x,\ t)\sim MG(x,\ t;\ x_{\text{ц.т.}},\ t_1)$ надо положить $2\varkappa M(t_0-t_1)=$ $=\int(x-x_{\text{ц.т.}})^2\rho_0(x)\,dx$, откуда легко найти t_1. Проводя преобразования, аналогичные (7), нетрудно проверить, что при так выбранном t_1 в разложении отношения левой части асимптотической формулы к правой по степеням t^{-1} члены с первой степенью взаимно уничтожаются, и потому это отношение будет при больших t отличаться от 1 на величину порядка t^{-2}.

*) «Сотри случайные черты и ты увидишь — мир прекрасен» — сказал по аналогичному поводу А. Блок. Но, может быть, он имел при этом в виду всю математику?

Из формулы (4) можно сделать также важный вывод о гладкости решения при $t>t_0$. Если под знаком интеграла (4) произвести любое число дифференцирований по параметрам x и t, то в качестве множителей появятся многочлены от ξ, которые не могут нарушить сходимости интеграла. Это означает, что интеграл (4) имеет при $t>t_0$ непрерывные производные по x и t всех порядков. Значит, такие производные имеет и решение $\rho(x, t)$, не взирая на то, что начальное распределение плотности $\rho_0(x)$ могло быть разрывным. Процесс диффузии приводит к немедленному устранению разрывов не только у самой плотности, но и у всех ее производных.

Из сказанного вытекают, в частности, дополнительные соображения по поводу трудностей, возникающих при решении уравнения диффузии назад во времени (см. конец § 4). Именно, если заданное при некотором t_1 распределение плотности имеет разрыв само или разрыв в производной любого порядка, то решение назад заведомо невозможно. Но и если таких разрывов нет, то задаваемое распределение могло получиться в результате «сглаживания» разрыва, который был в некоторый момент $\tilde{t}<t_1$, близкий к t_1; в этом случае продолжение решения за $\tilde{t}$ невозможно.

К этому вопросу мы еще раз вернемся при рассмотрении решений, экспоненциальных во времени.

Упражнения

1. Пусть в момент t_0 частицы суммарной массы M были равномерно распределены на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$. Найдите закон эволюции плотности среды из частиц и выразите этот закон через интеграл вероятностей

$$\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-s^2/2}\,ds. \tag{8}$$

Таблицы значений этого интеграла имеются, например, в ЭПМ, гл. XIII.

2. То же, если частицы были при $t=t_0$ распределены на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ с плотностью $\rho_0(x)=\alpha x+\beta$ (α, $\beta=\text{const}$).

3. Найдите закон эволюции плотности при начальном условии $\rho|_{t=t_0}=\alpha e^{-\beta x^2}$ (α, $\beta=\text{const}>0$).

§ 7. Применение преобразования Фурье

В ЭПМ, §§ XIV.2 и 4, мы уже говорили о применении интегрального преобразования Фурье к решению обыкновенных линейных автономных дифференциальных уравнений. Оно широко применяется и к решению уравнений с частными производными; это применение мы продемонстрируем на примере решения уравнения диффузии на всей оси x с заданным начальным распределением плотностей (§ 6).

Напомним (см., например, ЭПМ, гл. XIV), что каждой функции $f(x)$, определенной при $-\infty<x<\infty$ и достаточно быстро затухающей при $x\to\pm\infty$, можно поставить в соответствие ее фурье-образ