Из формулы (4) можно сделать также важный вывод о гладкости решения при $t > t_0$. Если под знаком интеграла (4) произвести любое число дифференцирований по параметрам x и t, то в качестве множителей появятся многочлены от ξ, которые не могут нарушить сходимости интеграла. Это означает, что интеграл (4) имеет при $t > t_0$ непрерывные производные по x и t всех порядков. Значит, такие производные имеет и решение $\rho(x, t)$, не взирая на то, что начальное распределение плотности $\rho_0(x)$ могло быть разрывным. Процесс диффузии приводит к немедленному устранению разрывов не только у самой плотности, но и у всех ее производных.

Из сказанного вытекают, в частности, дополнительные соображения по поводу трудностей, возникающих при решении уравнения диффузии назад во времени (см. конец § 4). Именно, если заданное при некотором t_1 распределение плотности имеет разрыв само или разрыв в производной любого порядка, то решение назад заведомо невозможно. Но и если таких разрывов нет, то задаваемое распределение могло получиться в результате «сглаживания» разрыва, который был в некоторый момент $\tilde{t} < t_1$, близкий к t_1; в этом случае продолжение решения за $\tilde{t}$ невозможно.

К этому вопросу мы еще раз вернемся при рассмотрении решений, экспоненциальных во времени.

Упражнения

1. Пусть в момент t_0 частицы суммарной массы M были равномерно распределены на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$. Найдите закон эволюции плотности среды из частиц и выразите этот закон через интеграл вероятностей

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-s^2/2}\, ds. \qquad (8)$$

Таблицы значений этого интеграла имеются, например, в ЭПМ, гл. XIII.

2. То же, если частицы были при $t = t_0$ распределены на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ с плотностью $\rho_0(x) = \alpha x + \beta$ (α, $\beta = \mathrm{const}$).

3. Найдите закон эволюции плотности при начальном условии $\rho|_{t=t_0} = \alpha e^{-\beta x^2}$ (α, $\beta = \mathrm{const} > 0$).

§ 7. Применение преобразования Фурье

В ЭПМ, §§ XIV.2 и 4, мы уже говорили о применении интегрального преобразования Фурье к решению обыкновенных линейных автономных дифференциальных уравнений. Оно широко применяется и к решению уравнений с частными производными; это применение мы продемонстрируем на примере решения уравнения диффузии на всей оси x с заданным начальным распределением плотностей (§ 6).

Напомним (см., например, ЭПМ, гл. XIV), что каждой функции $f(x)$, определенной при $-\infty < x < \infty$ и достаточно быстро затухающей при $x \to \pm\infty$, можно поставить в соответствие ее фурье-образ (спектральную плотность) $F(k)$, связанный с $f(x)$ формулами

$$F(k)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,e^{-ikx}\,dx, \qquad f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} F(k)\,e^{ikx}\,dk.$$

Это преобразование линейное: при сложении прообразов образы также складываются. Отсюда сразу следует, что если образ и потому прообраз зависят от некоторого параметра μ, то при дифференцировании прообраза по μ образ также продифференцируется по μ: в самом деле, если $f(x;\ \lambda)\to F(k;\ \lambda)$, то

$$f(x;\ \mu+\Delta\mu)\longrightarrow F(k;\ \mu+\Delta\mu),$$
$$\frac{f(x;\ \mu+\Delta\mu)-f(x;\ \mu)}{\Delta\mu}\longrightarrow\frac{F(k;\ \mu+\Delta\mu)-F(k;\ \mu)}{\Delta\mu},$$

откуда $f'_\mu(x;\ \mu)\to F'_\mu(k;\ \mu)$. Кроме того, нам понадобится следующее свойство (см., например, ЭПМ, § XIV.4): при дифференцировании прообраза по x образ умножается на ik.

Вооружась этими сведениями, обозначим буквами $R(k,\ t)$ фурье-образ искомого решения $\rho(x,\ t)$ при фиксированном t, т. е.

$$R(k,\ t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(x,\ t)\,e^{-ikx}\,dx, \qquad \rho(x,\ t)=\int_{-\infty}^{\infty} R(k,\ t)\,e^{ikx}\,dk. \tag{1}$$

Если совершить над обеими частями уравнения (1.8) преобразование Фурье, то в силу предыдущего абзаца мы приходим к соотношению

$$\frac{\partial R}{\partial t}=\varkappa\,(ik)^2\,R, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial R}{\partial t}=-\varkappa k^2 R, \tag{2}$$

которому должен удовлетворять фурье-образ решения. Это соотношение при любом фиксированном k можно рассматривать как о б ы к н о в е н н о е дифференциальное уравнение, в чем и состояла цель проделанного перехода.

Решая уравнение (2) при любом фиксированном k с помощью разделения переменных, получим

$$R(k,\ t)=C(k)\,e^{-\varkappa k^2 t} \tag{3}$$

(постоянная интегрирования может зависеть от k). Произвольная функция $C(k)$ определяется начальным условием, так как из первого равенства (2) имеем

$$C(k)=R\Big|_{t=0}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_0(x)\,e^{-ikx}\,dx. \tag{4}$$

Найдя фурье-образ решения, надо вернуться к самому решению с помощью второй формулы (1). Пользуясь формулами (3) и (4), получаем

$$\rho(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty} C(k)\,e^{-\varkappa k^2 t}e^{ikx}\,dk=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_0(\xi)\,e^{-ik\xi}\,d\xi\right)e^{-\varkappa k^2 t}e^{ikx}\,dk=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\rho_0(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\varkappa t k^2+i(x-\xi)k}\,dk. \qquad (5)$$

Решение в принципе получено, но его можно упростить, так как внутренний интеграл можно вычислить. Перепишем его в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha k^2+i\beta k}\,dk,$$

где α — вещественное положительное число. Дополнив показатель степени до полного квадрата, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\alpha\left(k^2-\frac{i\beta}{\alpha}k\right)\right]dk=\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[-\alpha\left(k-\frac{i\beta}{2\alpha}\right)^2-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right]dk=$$

$$=e^{-\beta^2/4\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(k-i\lambda)^2}\,dk \qquad \left(\lambda=\frac{\beta}{2\alpha}\right).$$

Выясним, как зависит последний интеграл I от λ, для чего продифференцируем его по λ как по параметру *). Это даст

$$\frac{dI}{d\lambda}=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(k-i\lambda)^2}\left[-\alpha\cdot 2(k-i\lambda)\cdot(-i)\right]dk=$$

$$=-i\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha(k-i\lambda)^2}\left[-\alpha(k-i\lambda)^2\right]_k'\,dk=-ie^{-\alpha(k-i\lambda)^2}\Big|_{k=-\infty}^{\infty}=0.$$

Стало быть, I на самом деле не зависит от λ, а потому при вычислении I можно положить $\lambda=0$:

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha k^2}\,dk=\left|\sqrt{\alpha}\,k=s\right|=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-s^2}\,ds=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

*) Если бы в последнем интеграле вместо $i\lambda$ стоял вещественный параметр μ, то независимость этого интеграла от μ сразу видна, если сделать замену $k-\mu=k'$. Однако замена $k-i\lambda=k'$ привела бы к интегралу по линии в комплексной плоскости, поэтому здесь потребовались несколько более сложные рассуждения.

Итак, мы пришли к формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k^2+i\beta k}\,dk = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\,e^{-\beta^2/4\alpha} \qquad (\alpha > 0). \tag{6}$$

Применяя ее к правой части (5), получаем формулу (6.4) с $t_0=0$ (проверьте!).

§ 8. Вероятностная трактовка решения

Вернемся к рассмотренной в § 1 задаче о блуждании частиц по узлам дискретной сетки, с которой мы начали исследование процесса диффузии. Мы приняли рекуррентное соотношение

$$N_{j,\,n+1} = \frac{1}{2}(N_{j-1,\,n} + N_{j+1,\,n}) \qquad (1) = (1.2)$$

между числом частиц в узле в последующий и предыдущий моменты времени за совершенно точное; однако на самом деле это допущение требует некоторого внимания и не может быть всегда безоговорочно принято. Так, на краях расплывающегося облака частиц значения N_{jn} могут оказаться сравнительно небольшими и соотношение (1) там будет нарушаться в результате флуктуаций. Более того, это соотношение при малых N_{jn} вступает в очевидное противоречие с тем, что числа N_{jn} должны быть целыми, так как из него вытекает, например, что число частиц на самом краю облака за каждый временной шаг τ должно делиться пополам.

Отметим, что вблизи края облака проведенный в § 1 переход от дискретной схемы к непрерывной, даже если принять соотношение (1) за совершенно точное, неприменим. Это ясно, например, из того, что в задаче об эволюции порции частиц, сосредоточенной при $t=0$ в точке $x=0$, решение дискретной задачи при $|x| > \frac{h}{\tau}t$ тождественно равно нулю, тогда как решение соответствующей непрерывной задачи, построенное в § 5, положительно для всех x. Условие, при котором можно перейти от дискретного решения к непрерывному, было указано в § 1; поведение же дискретного решения у краев облака описывается иным способом, на котором мы здесь не будем останавливаться. Таким образом, в одной и той же задаче нужно упрощения производить по-разному, в зависимости от характера исследуемого вопроса.

Нетрудно указать непосредственный вероятностный смысл коэффициента диффузии $\varkappa$. Для этого напомним, что для любой случайной величины ξ вводится понятие ее дисперсии $\Delta_\xi^2 = \overline{(\xi - \overline{\xi})^2}$ (см., например, ЭПМ, § XIII.7), где чертой сверху обозначено среднее значение, которое для дискретной случайной величины вычис-