Итак, мы пришли к формуле

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha k^2+i\beta k}\,dk=\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}e^{-\beta^2/4\alpha} \qquad (\alpha>0). \tag{6}$$

Применяя ее к правой части (5), получаем формулу (6.4) с $t_0=0$ (проверьте!).

§ 8. Вероятностная трактовка решения

Вернемся к рассмотренной в § 1 задаче о блуждании частиц по узлам дискретной сетки, с которой мы начали исследование процесса диффузии. Мы приняли рекуррентное соотношение

$$N_{j,\,n+1}=\frac{1}{2}(N_{j-1,\,n}+N_{j+1,\,n}) \qquad (1)=(1.2)$$

между числом частиц в узле в последующий и предыдущий моменты времени за совершенно точное; однако на самом деле это допущение требует некоторого внимания и не может быть всегда безоговорочно принято. Так, на краях расплывающегося облака частиц значения N_{jn} могут оказаться сравнительно небольшими и соотношение (1) там будет нарушаться в результате флуктуаций. Более того, это соотношение при малых N_{jn} вступает в очевидное противоречие с тем, что числа N_{jn} должны быть целыми, так как из него вытекает, например, что число частиц на самом краю облака за каждый временной шаг τ должно делиться пополам.

Отметим, что вблизи края облака проведенный в § 1 переход от дискретной схемы к непрерывной, даже если принять соотношение (1) за совершенно точное, неприменим. Это ясно, например, из того, что в задаче об эволюции порции частиц, сосредоточенной при $t=0$ в точке $x=0$, решение дискретной задачи при $|x|>\frac{h}{\tau}t$ тождественно равно нулю, тогда как решение соответствующей непрерывной задачи, построенное в § 5, положительно для всех x. Условие, при котором можно перейти от дискретного решения к непрерывному, было указано в § 1; поведение же дискретного решения у краев облака описывается иным способом, на котором мы здесь не будем останавливаться. Таким образом, в одной и той же задаче нужно упрощения производить по-разному, в зависимости от характера исследуемого вопроса.

Нетрудно указать непосредственный вероятностный смысл коэффициента диффузии $\varkappa$. Для этого напомним, что для любой случайной величины ξ вводится понятие ее дисперсии $\Delta_\xi^2=\overline{(\xi-\bar{\xi})^2}$ (см., например, ЭПМ, § XIII.7), где чертой сверху обозначено среднее значение, которое для дискретной случайной величины вычисляется по формуле $\bar{\xi}=\sum\limits_i p_i x_i$ (здесь x_i — возможные значения величины ξ, а p_i — их вероятности). При одиночном скачке частицы среднее значение приращения координаты равно нулю, а потому ее дисперсия равна $\frac{1}{2}h^2+\frac{1}{2}(-h)^2=h^2$. Но при сложении независимых величин их дисперсии также складываются*), а за время $t\gg\tau$ частица совершает $\frac{t}{\tau}$ независимых скачков. Значит, дисперсия (средний квадрат) суммарного приращения координаты частицы за время t равна $\frac{t}{\tau}\cdot h^2=2\varkappa t$ (см. (1.6)). В частности, средний квадрат этого приращения за единицу времени равен $2\varkappa$.

Теперь ясен характер предельного перехода при h, $\tau\to 0$, о котором говорилось в § 1. Мы считали, что при этом $\tau\backsim h^2$, а это в силу предыдущего абзаца равносильно предположению, что средний квадрат суммарного приращения координаты за фиксированное время t при этом переходе остается конечным. Интересно, что при этом суммарный путь, пройденный каждый частицей за время t, при подсчете которого все перемещения частицы, независимо от их направлений, суммируются абсолютными величинами, равен $\frac{t}{\tau}\cdot h=\frac{h^2}{\tau}\cdot\frac{t}{h}$ и поэтому стремится к бесконечности. Чем ближе к пределу, тем больше мгновенная скорость частиц (поэтому в пределе край расплывающегося облака частиц полностью расплывается, мгновенно уходя на бесконечность), но тем чаще они осциллируют, так что эффективный путь (абсолютное приращение координаты) остается конечным. Смысл величины $2\varkappa$ после перехода от дискретной картины к непрерывной остается тем же, что был указан в предыдущем абзаце.

Мы рассматривали равенство (1) как рекуррентное соотношение между количеством частиц в узловых точках в последовательные моменты времени, причем это соотношение выполняется с тем большей относительной точностью, чем эти количества больше. Но есть еще одно истолкование этого соотношения, при котором оно выступает как совершенно точное. Именно, допустим, что начальное рас-

---

*) Напомним доказательство этого простого, но важного утверждения (см., например, ЭПМ, § XIII.7). Как известно, при сложении случайных величин их средние значения складываются, а при умножении независимых случайных величин их средние значения перемножаются. Поэтому если величины ξ и η независимы, то

$$\Delta^2_{\xi+\eta}=\overline{[(\xi+\eta)-\overline{(\xi+\eta)}]^2}=\overline{[(\xi-\bar{\xi})+(\eta-\bar{\eta})]^2}=\overline{(\xi-\bar{\xi})^2}+$$
$$+2\overline{(\xi-\bar{\xi})}\,\overline{(\eta-\bar{\eta})}+\overline{(\eta-\bar{\eta})^2}=\Delta^2_\xi+2\cdot 0\cdot 0+\Delta^2_\xi,$$

так как $\overline{\xi-\bar{\xi}}=\bar{\xi}-\bar{\bar{\xi}}=\bar{\xi}-\bar{\xi}=0.$

пределение частиц нам неизвестно, а величина N_{j0} равна лишь среднему значению по многим экспериментам — говорят также, *математическому ожиданию* — числа частиц в положении jh в начальный момент $t=0$. Тогда среднее значение N_{j1} числа частиц в момент $t=\tau$ в положении jh выражается через эти начальные значения по формуле (1), в которой положено $n=0$; через найденные средние значения выражаются средние значения N_{j2} и т. д. Конечно, эти средние значения уже не обязаны быть целыми.

Итак, равенство (1) можно рассматривать как (точное) рекуррентное соотношение между математическими ожиданиями числа частиц в заданный момент в выбранном месте. В частности, может идти речь о блуждании о д н о й частицы по оси x; тогда N_{jn} будет просто равно вероятности обнаружить эту частицу в момент $n\tau$ в положении jh.

Функцию $\rho(x, t)$ можно истолковать также как плотность математического ожидания массы частиц, а если блуждает всего одна частица единичной массы — то как плотность вероятности, т. е. функцию распределения вероятности этой частицы. В последнем случае эта функция должна удовлетворять очевидному условию нормировки

$$\int \rho(x, t)\,dx \equiv 1.$$

В частности, функция влияния (см. (6.3))

$$G(x, t; 0, 0) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}}\, e^{-x^2/4\varkappa t}$$

равна плотности вероятности частицы в момент $t>0$, если эта частица в момент $t=0$ была расположена в точке $x=0$.

Нетрудно подсчитать среднее абсолютное приращение координаты этой частицы за время t: оно равно

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa t}} e^{-x^2/4\varkappa t}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi\varkappa t}} \int_0^{\infty} x e^{-x^2/4\varkappa t}\,dx = 2\sqrt{\frac{\varkappa}{\pi} t}.$$

Как видим, результат пропорционален $\sqrt{t}$ и $\sqrt{\varkappa}$, что согласуется с подсчитанным выше средним квадратом приращения координаты. Казалось бы, средним абсолютным приращением координаты частицы за единицу времени, как достаточно наглядным понятием, можно было бы пользоваться в качестве характеристики скорости диффузии. Однако в теории вероятностей обнаруживается, что характеристика $\overline{|\xi - \bar{\xi}|}$ разброса случайной величины ξ вокруг ее среднего значения $\bar{\xi}$ оказывается гораздо менее удобной, чем дисперсия $D_\xi = \overline{(\xi - \bar{\xi})^2}$ и связанное с ней среднее квадратичное уклонение $\Delta_\xi = \sqrt{D_\xi}$; величину $\overline{|\xi - \bar{\xi}|}$ часто бывает трудно вычислять и она не обладает такими хорошими общими свойствами, как дисперсия Поэтому и при исследовании процесса диффузии основной характеристикой скорости процесса служит средний квадрат приращения координаты за единицу времени.

§ 9. Вероятностный вывод особого решения

Вероятностный подход дает возможность по-новому взглянуть на особое решение, построенное в § 5. Именно, найдем плотность вероятности частицы, непрерывно блуждающей по оси x и расположенной в момент $t=0$ в точке $x=0$, если процесс блуждания однороден и изотропен в пространстве и однороден во времени. Для этого представим случайную величину ξ — координату частицы в некоторый фиксированный момент времени t в виде суммы

$$\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n, \tag{1}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — приращения координаты частицы в последовательные промежутки времени протяженности $\frac{t}{n}$, а n — произвольно выбранное большое целое число. Тогда в силу сделанного выше предположения однородности все случайные величины ξ_i — независимые и обладают одинаковой функцией распределения и средним значением $\overline{\xi_i}=0$. Но из теории вероятностей (см., например, ЭПМ, § XIII.8) известно, что в таком случае при большом n сумма (1) должна быть распределена по закону Гаусса, т. е. имеет плотность распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta_\xi}e^{-x^2/2\Delta_\xi^2}, \tag{2}$$

независимо от того, по какому закону была распределена каждая из величин ξ_i *). Однако в силу указанного в § 8 вероятностного смысла коэффициента диффузии будет $\Delta_\xi^2=2\varkappa t$, т. е. $\Delta_\xi=\sqrt{2\varkappa t}$. Подставляя эти значения в (2), приходим к закону (5.8). Заодно мы видим глубокий смысл этого закона, т. е. функции Грина для уравнения диффузии: *это нормальное распределение Гаусса.*

Приведем здесь доказательство того, что сумма вида (1) большого числа независимых одинаково распределенных случайных величин распределена именно по закону Гаусса. Для этого обозначим буквами $\varphi(x)$ и $f(x)$ законы распределения величин ξ_i и ξ соответст-

---

*) В ЭПМ это утверждение не было полностью доказано, было показано только, что функция распределения суммы (1) при больших n удовлетворяет по n и x уравнению диффузии, остальное же было сообщено без доказательства. Теперь, когда в § 5 мы убедились, что положительные решения уравнения диффузии асимптотически переходят в автомодельное решение, данное утверждение получает обоснование. Впрочем, вскоре мы дадим независимое доказательство этого факта.