не обладает такими хорошими общими свойствами, как дисперсия Поэтому и при исследовании процесса диффузии основной характеристикой скорости процесса служит средний квадрат приращения координаты за единицу времени.

§ 9. Вероятностный вывод особого решения

Вероятностный подход дает возможность по-новому взглянуть на особое решение, построенное в § 5. Именно, найдем плотность вероятности частицы, непрерывно блуждающей по оси x и расположенной в момент $t=0$ в точке $x=0$, если процесс блуждания однороден и изотропен в пространстве и однороден во времени. Для этого представим случайную величину ξ — координату частицы в некоторый фиксированный момент времени t в виде суммы

$$\xi=\xi_1+\xi_2+\ldots+\xi_n, \tag{1}$$

где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ — приращения координаты частицы в последовательные промежутки времени протяженности $\frac{t}{n}$, а n — произвольно выбранное большое целое число. Тогда в силу сделанного выше предположения однородности все случайные величины ξ_i — независимые и обладают одинаковой функцией распределения и средним значением $\overline{\xi_i}=0$. Но из теории вероятностей (см., например, ЭПМ, § XIII.8) известно, что в таком случае при большом n сумма (1) должна быть распределена по закону Гаусса, т. е. имеет плотность распределения

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\Delta_\xi}e^{-x^2/2\Delta_\xi^2}, \tag{2}$$

независимо от того, по какому закону была распределена каждая из величин ξ_i *). Однако в силу указанного в § 8 вероятностного смысла коэффициента диффузии будет $\Delta_\xi^2=2\varkappa t$, т. е. $\Delta_\xi=\sqrt{2\varkappa t}$. Подставляя эти значения в (2), приходим к закону (5.8). Заодно мы видим глубокий смысл этого закона, т. е. функции Грина для уравнения диффузии: *это нормальное распределение Гаусса.*

Приведем здесь доказательство того, что сумма вида (1) большого числа независимых одинаково распределенных случайных величин распределена именно по закону Гаусса. Для этого обозначим буквами $\varphi(x)$ и $f(x)$ законы распределения величин ξ_i и ξ соответст-

*) В ЭПМ это утверждение не было полностью доказано, было показано только, что функция распределения суммы (1) при больших n удовлетворяет по n и x уравнению диффузии, остальное же было сообщено без доказательства. Теперь, когда в § 5 мы убедились, что положительные решения уравнения диффузии асимптотически переходят в автомодельное решение, данное утверждение получает обоснование. Впрочем, вскоре мы дадим независимое доказательство этого факта.

венно; кроме того, нам понадобятся фурье-образы $\Phi(k)$ и $F(k)$ этих законов. Известно (см., например, ЭПМ, § XIII.7), что при сложении независимых случайных величин с функциями распределения $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ получается случайная величина с функцией распределения

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_1(x-s)\,\varphi_2(s)\,ds; \qquad (3)$$

это действие называется свертыванием функций φ_1 и φ_2. С другой стороны, нетрудно проверить, что при свертывании функций их фурье-образы просто перемножаются с точностью до множителя 2π: фурье-образ функции (3) равен

$$\frac{1}{2\pi}\int e^{-ikx}\,dx\int\varphi_1(x-s)\,\varphi_2(s)\,ds=\frac{1}{2\pi}\int\varphi_2(s)\,ds\int e^{-ikx}\,\varphi_1(x-s)\,dx=$$
$$=|x-s=x_1|=\frac{1}{2\pi}\int e^{-iks}\varphi_2(s)\,ds\int e^{-ikx_1}\,\varphi_1(x_1)\,dx_1=$$
$$=2\pi\cdot\frac{1}{2\pi}\int e^{-ikx_1}\varphi_1(x_1)\,dx_1\cdot\frac{1}{2\pi}\int e^{-ikx_2}\varphi_2(x_2)\,dx_2,$$

что и требовалось доказать.

Доказанное свойство непосредственно распространяется на сумму любого числа независимых случайных величин. Поэтому, возвращаясь к сумме (1), получаем, что фурье-образы функций распределения величин ξ_i и ξ связаны между собой соотношением

$$F(k)=(2\pi)^{n-1}[\Phi(k)]^n=\frac{1}{2\pi}[2\pi\Phi(k)]^n. \qquad (4)$$

Подчеркнем, что при выводе этого простого соотношения было очень существенно, что величины ξ_i считались независимыми, а потому при их сложении их функции распределения свертывались. Эта независимость вытекает из предположения о том, что каждый следующий шаг при случайном блуждании совершается независимо от всех предыдущих, т. е. что процесс блуждания является марковским (см. начало § 2).

По условию все $\overline{\xi_i}=0$; кроме того, дисперсия каждой из величин ξ_i равна $\frac{1}{n}\Delta_\xi^2$ (почему?). Эти два утверждения можно записать в виде равенств

$$\int x\varphi(x)\,dx=0,\qquad \int x^2\varphi(x)\,dx=\frac{1}{n}\Delta_\xi^2;$$

кроме того, всегда $\int\varphi(x)\,dx=1$. Поэтому

$$\Phi(k)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-ikx}\varphi(x)\,dx=\frac{1}{2\pi}\int\left[1-ikx+\frac{(ikx)^2}{2!}+\dots\right]\varphi(x)\,dx=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{1}{2n}k^2\Delta_\xi^2+\dots\right).$$

Подставляя этот результат в (4), получаем

$$F(k)=\frac{1}{2\pi}\left(1-\frac{1}{2n}k^2\Delta_\xi^2+\ldots\right)^n=\frac{1}{2\pi}\exp\left[n\ln\left(1-\frac{1}{2n}k^2\Delta_\xi^2+\ldots\right)\right]. \tag{5}$$

Но при большом n логарифм можно разложить в ряд Тейлора по формуле $\ln(1+\alpha)=\alpha+\ldots$ Поэтому из формулы (5) при большом n получаем, отбрасывая члены высшего порядка малости,

$$F(k)=\frac{1}{2\pi}e^{-\Delta_\xi^2k^2/2}.$$

Теперь возвращаемся к фурье-прообразу:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-(\Delta_\xi^2/2)k^2+ikx}dk. \tag{6}$$

Применяя равенство (7.6), приходим к формуле (2) (проверьте!).

Если независимые одинаково распределенные случайные величины имеют ненулевое среднее значение, то их сумма, при большом числе слагаемых, распределена по закону Гаусса со сдвинутым центром распределения, т. е. по закону

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\Delta_\xi}e^{-(x-\bar\xi)^2/2\Delta_\xi^2}. \tag{7}$$

Это легко вывести из предыдущего, сделав замену $\xi_i-\bar\xi_i=\xi_i'$; см. также упражнение. Отсюда следует, что если процесс диффузии однороден, но не изотропен, так что среднее положение каждой частицы дрейфует вдоль оси x с постоянной скоростью v_0, то соответствующая функция Грина будет иметь вид (см. (6.3))

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi\varkappa(t-t_0)}}e^{-(x-v_0t-\xi)^2/4\varkappa(t-t_0)}.$$

Нетрудно проверить, что эта функция удовлетворяет «уравнению диффузии с дрейфом»

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+v_0\frac{\partial\rho}{\partial x}=\varkappa\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2},$$

которое получается из обычного уравнения диффузии (1.8) с помощью замены $x\to x-v_0t$.

Итак, мы показали, что сумма большого числа независимых случайных величин, распределенных по одинаковому закону (каков бы ни был этот закон!), дает величину, распределенную по закону Гаусса. В курсах теории вероятностей показывается, что закон Гаусса получается и в случае, когда слагаемые распределены по различным законам, лишь бы не получилось так, что в этой сумме одно или несколько слагаемых превалируют над остальными (тогда получится, по существу, не сумма большого числа слагаемых, а сумма нескольких слагаемых с небольшой поправкой). В то же время предположение независимости или хотя бы слабой зависимости слагаемых является весьма существенным, так как если оно не выполнено, то в результате сложения может получиться все что угодно.

Упражнение

Докажите формулу (7) по образцу того, как была доказана формула (2).

§ 10. Интегральное соотношение для функции Грина

Исходя из смысла функции Грина как функции влияния при решении задачи с начальными данными, мы сейчас выведем основное интегральное соотношение — тождество, которому удовлетворяет эта функция. Рассуждение на первом этапе будет иметь весьма общий характер и пригодно для любых линейных эволюционных процессов без последействия; в частности, мы не будем предполагать ни однородности, ни изотропии.

Итак, допустим, что в некоторый момент t_0 в точке ξ была сосредоточена единичная масса. Тогда в любой момент $t_1 > t_0$ эта масса в результате диффузии окажется распределенной по оси x с плотностью $\rho_1(x) = G(x,\ t_1;\ \xi,\ t_0)$. Примем это распределение за начальное и посмотрим, к какой плотности оно приведет в некоторый момент $t > t_1$; по общему методу получаем

$$\rho(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ t;\ x_1,\ t_1)\,\rho_1(x_1)\,dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ t;\ x_1,\ t_1)\,G(x_1,\ t_1;\ \xi,\ t_0)\,dx_1.$$

Но, с другой стороны, окончательная плотность получается к моменту t в результате диффузии единичной массы, сосредоточенной в момент t_0 в точке ξ, т. е. эта плотность равна $G(x,\ t;\ \xi,\ t_0)$. Приравнивая оба результата, приходим к требуемому соотношению

$$G(x,\ t;\ \xi,\ t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x,\ t;\ x_1,\ t_1)\,G(x_1,\ t_1;\ \xi,\ t_0)\,dx_1 \qquad (t_0 < t_1 < t). \tag{1}$$

(Мы предоставляем читателю истолковать этот результат, опираясь на вероятностную трактовку решений и на теорему об умножении вероятностей независимых событий.)

Если рассматриваемый процесс блуждания частицы однороден на оси x, то функция влияния G зависит не от x и ξ в отдельности, а от разности $x - \xi$ (если к тому же процесс изотропен, то от $|x - \xi|$). Аналогично, если процесс однороден во времени, то G зависит от $t - t_0$. Сделав эти предположения, мы можем переписать соотно-